Lista 1 - Curso de Ciências Moleculares - Matemática 4
Exercício 1.

- A é fechado se, e só se, $A = \overline{A}$
- A é aberto se, e só se, $A = int(A)$.

Alguns exemplos:
c) é fechado, pois é o fecho da bola de raio um e centro zero,
d) é aberto, pois dado $x \in B_{\sqrt{2}}(0) - \overline{B_1(0)}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset B_{\sqrt{2}}(0) - \overline{B_1(0)}$, por exemplo, escolha $\epsilon < \min\{d(x, S^1), d(x, 2S^1)\}$, onde

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{e} \quad 2S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$$

.

f) não é fechado, e nem aberto, pois $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 = 1\}$ são pontos aderentes que não estão no conjunto e, ao mesmo tempo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^n : x^2 + y^2 = 2\}$ estão no conjunto e não são pontos interiores (checar).

Exercício 2.
a) Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de infinitos abertos. Por definição, dado $x \in \mathcal{A}$, existe um $U \in \mathcal{A}$ aberto tal que $x \in U$, conclua que x é um ponto interior de $\bigcup \mathcal{A}$.
Estude a intersecção de dois abertos $U_1 \bigcap U_2$. Seja $x \in U_1 \bigcap U_2$. Encontre uma bola com raio apropriado para que $B_r(x) \subset U_1 \bigcap U_2$, isto é, conclua que x é um ponto interior. A demonstração segue análoga para um conjunto finito de abertos.
b) Mostre que dado uma família de fechados, o complementar da intersecção da família é um aberto, da mesma forma para a união finita de fechados (lembrar das fórmulas de conjuntos).
c) Mostre que todo ponto interior de $\mathbb{R}^n$ é interior e que seu complementar é aberto.
d) Estude conjuntos da forma $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} [\frac{1}{n}, 1]$ e $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$.

Exercício 3.
Usando a definição de ponto interior e ponto de fronteira, mostre que cada um dos conjuntos possuem intersecção vazia.
Conclua que $(\partial S)^c = int(S) \cup int(S^c)$ e observe que o complementar de um aberto é fechado.

Exercício 4.
a) Mostre que $\{x\}$ é fechado e use o exercício 2.b para concluir que $F \cup \{x\}$ é fechado. Além disso, observe que $(A \setminus \{x\})^c = (A^c) \cup \{x\}$ use o 2b novamente para concluir que $(A \setminus \{x\})^c$ é fechado.
b) De forma análoga ao a), note que $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.
c) Mostre que $[a,b]^c$ é aberto, isto é, todo ponto é interior.

Exercício 5.
b) Procure duas sequências $(x_n^1, y_n^1) \to (0,0)$ e $(x_n^2, y_n^2) \to (0,0)$ tais que $f(x_n^1, y_n^1) \to L_1$ e $f(x_n^2, y_n^2) \to L_2$, com $L_1 \neq L_2$.

Tente, $(x_n^1, y_n^1) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ e $(x_n^2, y_n^2) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n^2})$.

Exercício 6.
Sem perda de generalidade, assuma $f(a) > 0$, como $f(a) \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < f(a)$, use a contínuidade e conclua que existe um $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$ para todo $x \in B_\delta(a)$.

Exercício 8.
Calcule o limite, conclua que é dado por $\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$, portanto, conclua que existem limites direcionais distintos e não é possível estender f para uma função contínua.

Exercício 11.
a) Considere $B_r(z)$. Usando a desigualdade triangular mostre que $d(x + t(y-x), z) < r$, para todo $x, y \in B_r(z)$ e $t \in [0,1]$.
b) Tome $a, b \in S$, observe que a reta $[a,b] \subset S$, conclua que $f(a) = f(b)$ usando o teorema do valor intermediário.

Exercício 12.
b) Estude a função $f(x) = \sum_{j=0}^n x_j$.

Exercício 13.
a) Proceda análogo ao exercício 11.b.

Exercício 15.
Note pelo teorema do completamento que $\{v_i\}$ é uma base para $\mathbb{R}^n$. Conclua que $\nabla f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 17.
Calcule os limites pela definição, isto é, mostre que

$$\frac{u(t+h) - u(t) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) - \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)\right)h}{h} \to 0.$$

Exercício 18.
a) Parametrize a superfície $(x = u,\ y = v)$, calcule os vetores tangentes e lembre que o produto vetorial retorna um vetor perpendicular.
b) Lembre que $< u, v >= \|u\| \, \|v\| \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre u e v.