LISTA DE EXERCÍCIOS ÁLGEBRA LINEAR - TURMA 1

Os exercícios a seguir foram selecionados dos livros do Hoffman/Kunze e Domingues/Callioli/Costa. Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1

Resolver os sistemas abaixo em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ x+6y+3z=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 2y=3 \end{cases}$

Exercício 2

Determinar todas as soluções do sistema de equações em que x e y pertencem a $\mathbb{C}$.

$$\begin{gathered} (1-i)x-iy=0 \\ 2x+(1-i)y=0 \end{gathered}$$

Exercício 3

Discutir o seguinte sistema linear (em função de a), isto é, determine os valores de a tais que o sistema não tenha solução, tenha solução única ou tenha infinitas soluções.

$$\begin{gathered} x+y-az=0 \\ ax+y-z=2-a \\ x+ay-z=-a \end{gathered}$$

Exercício 4

Consideremos o sistema de equações

$$\begin{gathered} x-y+2z=1 \\ 2x+2z=1 \\ x-3y+4z=2 \end{gathered}$$

Este sistema admite solução? Em caso afirmativo, descrever explicitamente todas as soluções.

Exercício 5

Seja A, B e C elementos de $M_n(\mathbb{F})$. Suponha que A seja inversível. Mostre que
a) Se $AB=AC$, então $B=C$.
b) Se $AB=0$, então $B=0$.

Exercício 6

Mostre que a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

é inversível para qualquer a, b e c em $\mathbb{F}$ e que sua inversa é

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac-b & -c & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 7

Verificar quais das seguintes matrizes são inversíveis e determinar as inversas, caso existam a)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b)$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 8
Determinar as matrizes elementares em $M_3(\mathbb{F})$.

Exercício 9
Seja $A \in M_{2\times 1}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{1\times 2}(\mathbb{F})$. Demonstre que $C = AB$ não é inversível.

Exercício 10
Seja $A \in M_{m\times p}(\mathbb{F})$ e $B \in M_{p\times n}(\mathbb{F})$. Mostre que $(AB)^t = B^t A^t$ e que $I_n^t = I_n$, em que $I_n \in M_n(\mathbb{F})$ é a identidade. Use este resultado para mostrar que se $A \in M_n(\mathbb{F})$ é inversível, então A^t também é. Além disto vale $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.