EXERCÍCIO 1 PARA ENTREGAR - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Problema. Seja $u:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^2 definida no aberto Ω. O objetivo deste exercício é mostrar que se $\Delta u=0$, então

$$u(x)=\frac{1}{V(B_r(x))}\int_{B_r(x)}u(y)\,dy=\frac{1}{A(\partial B_r(x))}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,dS(y),$$

para todo $r>0$ para o qual $\overline{B_r(x)}\subset\Omega$. Acima, $B_r(x):=\{y\in\mathbb{R}^n,|y-x|<r\}$ é a bola de centro x e raio $r>0$, $V(B_r(x))=\frac{4}{3}\pi r^3$ é o volume da bola e $A(\partial B_r(x))=4\pi r^2$ é a área de sua fronteira. Em particular, se u é a temperatura de um material em equilíbrio térmico, isto implica que a temperatura em cada ponto $x\in\Omega$ é igual a temperatura média em toda bola de centro x contida em Ω.

a) Use o Teorema da Divergência para mostrar que se $u:\Omega\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 definida num aberto Ω e $\overline{B_r(x)}\subset\Omega$, então

$$\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,dy=\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial n}(y)\,dS(y),$$

em que n é a normal que aponta para fora da esfera.

b) Seja $x=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$. Use coordenadas $y=(x_1+rcos(\theta)\,cos(\varphi),x_2+rsen(\theta)\,cos(\varphi),x_3+rsen(\varphi))$ e $z=(cos(\theta)\,cos(\varphi),sen(\theta)\,cos(\varphi),sen(\varphi))$ e a definição de integral de superfície para provar que

$$\frac{1}{A(\partial B_r(x))}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,dS(y)=\frac{1}{A(\partial B_1(0))}\int_{\partial B_1(0)}u(x+rz)\,dS(z).$$

c) Defina $\phi(r)=\frac{1}{A(\partial B_r(x))}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,dS(y)$ e mostre que $\phi'(r)=\frac{1}{A(\partial B_r(x))}\int_{\partial B_r(x)}\left\langle\nabla u(y),\frac{y-x}{r}\right\rangle dS(y)$. (Dica: Use a expressão $\frac{1}{A(\partial B_1(0))}\int_{\partial B_1(0)}u(x+rz)\,dS(z)$ para derivar. Nas condições acima, pode passar a derivada para dentro da integral. Depois volte para as coordenadas anteriores).

d) Use os itens a) e c) para mostrar que, se $\Delta u=0$, então $\phi(r)$ é uma constante, ou seja, não varia com $r>0$.

e) Tome o limite $\lim_{r\to0}\phi(r)$ e conclua que, se $\Delta u=0$, então

$$u(x)=\frac{1}{A(\partial B_r(x))}\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,dS(y).$$

f) Utilizando coordenadas polares, mostre que

$$\int_{B_r(x)}u(y)\,dy=\int_0^r\left(\int_{\partial B_r(x)}u(y)\,dS(y)\right)dr.$$

Conclua que, se $\Delta u=0$, então

$$u(x)=\frac{1}{V(B_r(x))}\int_{B_r(x)}u(y)\,dy.$$