Exercício para entregar 1 - Matemática 4

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/∼pplopes/matematica42019

16 de abril de 2019

O objetivo do exercício é usar o método dos multiplicadores de Lagrange para demonstrar algumas desigualdades.

Os exercícios foram retirados (com ligeiras modificações) de

Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis, Diomara Pinto, Maria Cândida e Ferreira Morgado, editora UFRJ, 2014.

1) Considere a função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x+y+z$, um número $k>0$ e a superfície definida como $S_k:=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\, xyz=k,\, x>0,\, y>0,\, z>0\right\}$.

Ache o mínimo de f na superfície S_k e use o resultado para mostrar que, se $x\geq 0$, $y\geq 0$ e $z\geq 0$, então

$$(xyz)^{\frac{1}{3}}\leq\frac{1}{3}(x+y+z).$$

2) Repita o argumento anterior para mostrar que a média geométrica é sempre menor ou igual a média aritmética, isto é, se $x_1\geq 0$, ..., $x_n\geq 0$, então

$$(x_1...x_n)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{n}(x_1+...+x_n).$$

3) A função $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=\ln(x)+\ln(y)+3\ln(z)$ tem um máximo na superfície definida por $S_a=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\, x^2+y^2+z^2=5a^2,\, x>0,\, y>0,\, z>0\right\}$, em que $a>0$. Calcule esse valor (do máximo da função f em S_a).

4) Use o resultado do item 3) para mostrar que, se $x\geq 0$, $y\geq 0$ e $z\geq 0$, então

$$x^2y^2z^6\leq 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5.$$