LISTA DE EXERCÍCIOS 2 ÁLGEBRA LINEAR - TURMA 1

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Hoffman/Kunze e Domingues/Callioli/Costa. Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1
Seja $V = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) | \, x, y \in \mathbb{R}\}$ Podemos definir diversas operações $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $. : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ em V. Nos exemplos abaixo diga por que as operações definidas em cada item não fazem de $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial.

a) $\begin{array}{c}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,0)\\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\end{array}$

b) $\begin{array}{c}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ \lambda(x,y)=(\lambda x,0)\end{array}$

c) $\begin{array}{c}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ \lambda(x,y)=(x,\lambda y)\end{array}$

d) $\begin{array}{c}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1,y_1)\\ \lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)\end{array}$

e) $\begin{array}{c}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(2x_1-2y_1,-x_1+y_1)\\ \lambda(x,y)=(3\lambda x,-\lambda x)\end{array}$

Exercício 2
Mostre que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 3
Em cada um dos casos verifique se o conjunto W contido no espaço vetorial V é um subespaço do espaço vetorial V. Lembramos aqui que $\mathbb{F}[x]$ são os polinômios em $\mathbb{F}$, $C^1(\mathbb{R})$ são as funções deriváveis e com derivadas contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{F}^3 | \, x = 0\}$, $V = \mathbb{F}^3$.

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{F}^3 | \, x \in \mathbb{Z}\}$, $V = \mathbb{F}^3$.

c) $W = \{p(t) \in \mathbb{F}[x] | \, \mathrm{grau}(p) \geq 2\}$, $V = \mathbb{F}[x]$.

d) $W = \{f \in C^1(\mathbb{R}) | \, f(t) + f'(t) = 0 \, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $V = C^1(\mathbb{R})$.

e) $W = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | \, A \,\text{inversível}\}$, $V = M_n(\mathbb{F})$.

f) $W = \{A \in M_n(\mathbb{F}) | \, AB = BA\}$, $V = M_n(\mathbb{F})$, para uma matriz $B \in M_n(\mathbb{F})$ fixa.

Exercício 4
Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W sobre $\mathbb{F}$. Mostre que
a) Se $U \subset V$, então $U + V = V$.

b) Se $U \subset V$, então $U \cap V = U$.

c) Se $U + V = U$, então $U \supset V$.

d) Se $U \cap V = U$, então $U \subset V$.

Exercício 5
a) Verifique se os conjuntos abaixo são L.I.
$\{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-2)\}$
$\{(1,1),(2,2)\}$
b) Para quais valores $m \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{(1,3,5),(2,m+1,10)\}$ é L.I.?

Exercício 6
Ache a dimensão e uma base para os espaços soluções dos sistemas lineares homogêneos.

a) $\begin{cases} x+y+z+w-t=0 \\ x-y-z+2w-t=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} 4x+3y-z+t=0 \\ x-y+2z-t=0 \end{cases}$.

Exercício 7
Mostre que $\{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$ é base de $P_3(\mathbb{F})$, polinômios de grau ≤ 3.

Exercício 8
No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços:
$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x = 0\}$
$V = [(1,2,0),(3,1,2)]$.
Determinar uma base e a dimensão dos subespaços U, V e $U+V$. Usando $dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V)$, conclua que $dim(U \cap V) = 1$. Ache um vetor não nulo neste espaço e conclua do fato da dimensão deste espaço ser 1, que este vetor é uma base para $U \cap V$.

Exercício 9
Considere as bases ordenadas $B = (e_1, e_2, e_3)$ e $C = (g_1, g_2, g_3)$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= \quad\;\; 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 \qquad + e_3 \end{aligned}$$

a) Determinar as matrizes de mudança de base de B para C, I_{CB}, e de C para B, I_{BC}.
b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas $(1,2,3)$ em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C.

Exercício 10
Considere as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$: $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^{ix}$, $f_3(x) = e^{-ix}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = cos(x)$, $g_3(x) = sen(x)$.
a) Demonstre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ e $\{g_1, g_2, g_3\}$ são conjuntos L.I de vetores.
b) Mostre que cada g_i pode ser escrito como combinação linear dos f_i. Use para isto as conhecidas relações $cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ e $sen(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.
c) Calcule a matriz de mudança da base $B = (f_1, f_2, f_3)$ para a base $C = (g_1, g_2, g_3)$. Se um vetor u na base B tem coordenadas $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Quais são as suas coordenadas na base C?

OBS: Note que $g_i \in [f_1, f_2, f_3]$, em que $[f_1, f_2, f_3]$ é o espaço vetorial de dimensão 3 gerado pelos f_i. Como o conjunto $\{g_1, g_2, g_3\}$ é L.I, tem três elementos e está contido no espaço vetorial $[f_1, f_2, f_3]$ que tem dimensão 3, então (g_1, g_2, g_3) é uma base ordenada do espaço vetorial $[f_1, f_2, f_3]$. Outra maneira de ver que (g_1, g_2, g_3) é uma base é verificar que a matriz que escreve g_i em termos de f_i é inversível. Como vimos, toda matriz inversível define uma matriz de mudança de base e, portanto, (g_1, g_2, g_3) é outra base para $[f_1, f_2, f_3]$.