EXERCÍCIO 2 PARA ENTREGAR - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/∼PPLOPES/MATEMATICA32018

A proposta do exercício é entender a interpolação de Lagrange usando os conceitos de dual e bidual de um espaço vetorial.

Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a n, isto é, $p \in \mathcal{P}_n$ se, e somente se, $p(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j$, para certas constantes c_0, ..., $c_n \in \mathbb{R}$.

1) Seja $a \in \mathbb{R}$ e definimos a função $f_a : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ por $f_a(p) = p(a)$, ou seja, $f_a\left(t \mapsto \sum_{j=0}^n c_j t^j\right) = \sum_{k=0}^n c_k a^k$. Mostre que f_a é um funcional linear. Considere a_0, ..., a_n números reais distintos e prove que $\{f_{a_0}, ..., f_{a_n}\}$ é uma base do dual de $\mathcal{P}_n$.

(Dica: Sabemos que o dual de $\mathcal{P}_n$ é o espaço $\mathcal{P}_n^* = \mathcal{L}(\mathcal{P}_n, \mathbb{R})$ de todas as transformações lineares de $\mathcal{P}_n$ em $\mathbb{R}$, ou seja, de todos os funcionais lineares de $\mathcal{P}_n$. Sabemos que $\dim(\mathcal{P}_n) = \dim(\mathcal{P}_n^*) = n + 1$. Assim, basta mostrar que $\{f_{a_0}, ..., f_{a_n}\}$ é linearmente independente, ou seja,

$$\alpha_0 f_{a_0} + ... + \alpha_n f_{a_n} = 0 \implies \alpha_0 = ... = \alpha_n = 0.$$

Para provar a implicação acima, use polinômios do tipo $\prod_{k=0, k\neq j}^n (x - a_k)$).

2) Seja $p \in \mathcal{P}_n$ e definimos a função $L_p : \mathcal{P}_n^* \to \mathbb{R}$ por $L_p(f) = f(p)$. Mostre que L_p é um funcional linear e, portanto é um elemento do bidual de $\mathcal{P}_n$.

3) Sejam a_0, ..., a_n números reais distintos e definimos os polinômios de Lagrange $p_j \in \mathcal{P}_n$ por

$$p_j(t) = \prod_{k=0, k\neq j}^n \frac{(t - a_k)}{(a_j - a_k)} = \frac{(t - a_0)(t - a_1) ... (t - a_{j-1})(t - a_{j+1}) ... (t - a_n)}{(a_j - a_0)(a_j - a_1) ... (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) ... (a_j - a_n)}.$$

Verifique que $\{L_{p_0}, ..., L_{p_n}\} \in \mathcal{P}_n^{**}$ é a base dual de $\{f_{a_0}, ..., f_{a_n}\}$, ou seja, $L_{p_j}(f_{a_k}) = \delta_{jk}$.

4) Seja $L : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n^{**}$ a função $L(p) = L_p$, ou seja, a função que associa cada polinômio p ao elemento L_p definido no item 2). Mostre que L é um isomorfismo. (Dica: Como $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{P}_n^{**}$ têm a mesma dimensão, basta provar que L é uma transformação linear injetora. Para mostrar que L é injetora, use as funções f_a do item 1).

5) Seja $p \in \mathcal{P}_n$. Como $\{L_{p_0}, ..., L_{p_n}\}$ é base de $\mathcal{P}_n^{**}$, concluímos que $L_p = \alpha_0 L_{p_0} + ... + \alpha_n L_{p_n}$. Mostre que $\alpha_j = L_p\left(f_{a_j}\right)$.

6) Use os itens anteriores para concluir que todo polinômio $p \in \mathcal{P}_n$ pode ser escrito como

$$p = \sum_{j=0}^n p(a_j)\, p_j.$$

Em particular, dados valores reais d_0, ..., d_n, mostre que sempre existe um único polinômio de ordem menor ou igual a n tal que $p(a_j) = d_j$. Este polinômio é dado por $p = \sum_{j=0}^n d_j p_j$. Esta é a fórmula de interpolação de Lagrange.