Exercício para entregar 2 - Matemática 4

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/∼pplopes/matematica4

15 de junho de 2018

Agulha de Buffon

O problema abaixo foi formulado em 1777 pelo nobre francês Georges Louis Leclere, o Conde de Buffon (1707-1788). Sua formulação foi retirada do livro "As provas estão n'o Livro" de Martin Aigner e Günter M. Ziegler:

"Suponha que você deixe cair uma pequena agulha num papel com pauta. Qual será, então, a probabilidade de ela cair numa posição tal que cruze uma das linhas?"

Quando a distância entre as linhas é d e o tamanho da agulha é $l < d$, a resposta do problema de Buffon é $p = \frac{2l}{\pi d}$, ou seja, a probabilidade p de que a agulha cruze uma das retas é $\frac{2l}{\pi d}$. Assim, se jogarmos n vezes uma agulha e ela cruzar as linhas k vezes, concluímos que $p \approx \frac{k}{n}$. Desta maneira,

$$\frac{2l}{\pi d} \approx \frac{k}{n} \implies \pi \approx \frac{2ln}{kd}.$$

Note acima que conseguimos uma aproximação para o número π! Quanto mais vezes jogarmos a agulha, melhor esta aproximação tenderá a ser.

O objetivo aqui é entender e resolver o problema acima.

Vamos supor que no plano $\mathbb{R}^2$ estão traçadas infinitas retas paralelas, cujas distâncias entre si é constante e denotada por d, e que cobrem todo o plano. As retas serão os conjuntos $R_k := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \, y = kd\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Se jogarmos uma agulha de comprimento $l < d$ (que corresponderá a um seguimento de reta de comprimento l), teremos duas opções: ou a agulha cruza uma das retas ou não cruza nenhuma. (Ver figura 1)

Para entendermos o problema, usaremos duas coordenadas que determinam a posição, a não ser por translações na direção do eixo x, da agulha em relação a linha abaixo de sua ponta esquerda. A coordenada $t \in [0, d[$ corresponderá à distância da ponta esquerda da agulha à primeira reta abaixo desta ponta. A coordenada $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ corresponderá ao ângulo que esta agulha faz em relação ao eixo x (Veja figura 2, para exemplos). Como estamos supondo que a posição que a agulha cai é aleatória, concluímos que a probabilidade da agulha cair com coordenadas (t, θ) pertencentes a um conjunto $C \subset [0, d[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é

$$P(C) = \frac{área\,(C)}{área\left([0, d[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)} = \frac{área\,(C)}{\pi d}.$$

a) Seja $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ um valor fixo, qual são os valores de t para os quais a agulha cruza a linha inferior? Seja $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ um outro valor fixo, qual são os valores de t para os quais a agulha cruza a linha superior? (Use trigonometria básica).

b) Seja A o conjunto de todos os $(t, \theta) \in [0, d[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para os quais uma agulha com coordenadas (t, θ) cruza alguma linha. Calcule a área de A. (A conta é simples. Calcule $\int\int_A dt d\theta$ primeiro em t usando o item a) e depois em θ).

c) Usando o item b), mostre que $P(A) = \frac{2l}{\pi d}$.

d) Use seus conhecimentos acerca de experimentos de Bernoulli e responda: Qual a probabilidade de, ao jogar n vezes uma agulha, ela cruze alguma linha k vezes? Em particular, qual é a probabilidade de que ela cruze alguma linha em todas as vezes? Ao jogar n vezes uma agulha, qual o valor do número de cruzamento com as linhas é mais frequente?

e) Ache um método simples, usando apenas uma agulha pequena e um papel pautado, para determinar os valores de π^n, em que $n = 1, 2, 3, ...$