

LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados do capítulo 2 do livro do Apostol.

Exercício 1. (Apostol seção 2.4 exercícios 1 a 10) Determine se as funções $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são lineares. Se forem lineares, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

1. $T(x, y) = (y, x)$
2. $T(x, y) = (x, -y)$
3. $T(x, y) = (x, 0)$
4. $T(x, y) = (x, x)$
5. $T(x, y) = (x^2, y^2)$
6. $T(x, y) = (e^x, e^y)$
7. $T(x, y) = (x, 1)$
8. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$
9. $T(x, y) = (x - y, x + y)$
10. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$

Exercício 2. (Apostol seção 2.4 exercícios 16 a 23) Determine se as funções $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ são lineares. Se forem lineares, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

1. $T(x, y, z) = (z, y, x)$
2. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$
3. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3x)$
4. $T(x, y, z) = (x, y, 1)$
5. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$
6. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$
7. $T(x, y, z) = (x, y^2, z^2)$
8. $T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$

Exercício 3. (Apostol seção 2.4 exercício 24) Seja \mathcal{P}_n o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n . Seja $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_n$ dado por $T(p)(x) = p(x + 1)$. T é linear? Se for, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

Exercício 4. (Apostol seção 2.5 exercício 25) Seja $T : C^1([-1, 1]) \rightarrow C([-1, 1])$ dado por $T(f)(x) = x \frac{df}{dx}(x)$. T é linear? Se for, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

Exercício 5. (Apostol seção 2.4 exercício 29) Seja $S \subset C([- \pi, \pi])$ o conjunto das funções tais que $f \in S$ se, e somente se,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{cos}(t) dt = 0.$$

- 1) Mostre que S é um subespaço de $C([- \pi, \pi])$.
- 2) Mostre que S contém as funções $\operatorname{sen}(nx)$ e $\operatorname{cos}(nx)$ para todo $n = 2, 3, 4, \dots$
- 3) Mostre que S tem dimensão infinita.

Seja $T : C([- \pi, \pi]) \rightarrow C([- \pi, \pi])$ dado por

$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \operatorname{cos}(x - t)\} f(t) dt$$

- 4) Mostre que a imagem de T tem dimensão finita. Ache uma base da imagem de T .
- 5) Determine o núcleo de T .
- 6) Ache todos os $c \neq 0$ e todos os $f \neq 0$ tais que $T(f) = cf$.

Exercício 6. (Apostol seção 2.4 exercício 30) Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear. Mostre que se V tem dimensão infinita, então ou núcleo de T ou a sua imagem tem dimensão infinita.

Exercício 7. (Apostol seção 2.8 exercício 21) Seja $T : V \rightarrow V$ uma transformação linear. Defina indutivamente $T^1 = T$, $T^{n+1} = T \circ T^n$, $n \geq 1$. Mostre que $T^{n+m} = T^n T^m$ e que se T é invertível, então T^n também é invertível, com $(T^n)^{-1} = T^{-n}$.

Exercício 8. (Apostol seção 2.8 exercício 23) Sejam $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow Z$ transformações lineares. Mostre que se S e T são invertíveis, então ST também é invertível e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Exercício 9. (Apostol seção 2.8 exercício 24) Sejam $T : V \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow V$ transformações lineares. Mostre que se S e T são invertíveis e $ST = TS$, então $S^{-1}T^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Exercício 10. (Apostol seção 2.8 exercício 25) Sejam $T : V \rightarrow V$ e $S : V \rightarrow V$ transformações lineares. Mostre que se $TS = ST$, então

$$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2 \quad (S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3.$$

Indique como estas fórmulas devem ser modificadas caso $ST \neq TS$.

Exercício 11. (Apostol seção 2.8 exercício 27) Seja \mathcal{P} o espaço vetorial de todos os polinômios reais. Definimos $D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ e $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ como $D(p)(x) = \frac{dp}{dx}(x)$ e $T(p)(x) = \int_0^x p(t) dt$. Prove que $DT = I$, mas $TD \neq I$, em que I é a identidade. Ache o núcleo e a imagem de TD .

Exercício 12. (Apostol seção 2.8 exercício 31) Seja \mathcal{P} o espaço vetorial de todos os polinômios reais. Definimos R, T e $S : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ por

$$\begin{aligned} R(p)(x) &= p(0) \\ S\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) &= \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \\ T\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) &= \sum_{k=0}^n a_k x^{k+1} \end{aligned}$$

1) Seja $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$ e determine a imagem de p sobre os operadores $R, S, T, ST, TS, (TS)^2, T^2S^2, S^2T^2, TRS, RST$.

2) Prove que R, S e T são lineares e determine o núcleo e a imagem destas transformações lineares.

3) Prove que T é injetor e ache uma transformação linear $Q : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que $QT = I$, em que I é a identidade.

4) Se $n \geq 1$, escreva $(TS)^n$ e $S^n T^n$ em função de I e R .

Exercício 13. (Apostol seção 2.12 exercício 1) Seja \mathbb{R}^n com a base canônica. Determine a matriz de cada uma das transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

1) T é a identidade.

2) T é a transformação linear nula.

3) T é a multiplicação por um escalar c .

Exercício 14. (Apostol seção 2.12 exercício 2) Seja \mathbb{R}^n com a base canônica. Determine a matriz de cada uma das transformações lineares:

1) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y, z) = (x, y)$.

2) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y, z) = (y, z)$.

3) $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z, w, v) = (y, z, w)$.

Exercício 15. (Apostol seção 2.12 exercício 3) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida na base canônica $\mathcal{B} = (i, j)$ de \mathbb{R}^2 da seguinte forma:

$$T(i) = i + j \quad T(j) = 2i - j.$$

1) Calcule $T(3i - 4j)$ e $T^2(3i - 4j)$ em termos de i e j .

2) Determine a matriz de T e de T^2 .

3) Determine a matriz de T e de T^2 em termos da base (e_1, e_2) , em que $e_1 = i - j$ e $e_2 = 3i + j$.

Exercício 16. (Apostol seção 2.12 exercício 5) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida na base canônica $\mathcal{B} = (i, j, k)$ de \mathbb{R}^3 da seguinte forma:

$$T(k) = 2i + 3j + 5k \quad T(j + k) = i \quad T(i + j + k) = j - k.$$

1) Calcule $T(i + 2j + 3k)$ e determine a dimensão do núcleo e da imagem de T .

2) Determine a matriz de T em relação a base canônica.

Exercício 17. (Apostol seção 2.12 exercício 10) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão 2, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ e $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ bases ordenadas de V e W , respectivamente. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear tal que $T(e_1 + e_2) = 3f_1 + 9f_2$ e $T(3e_1 + 2e_2) = 7f_1 + 23f_2$

1) Calcule $T(e_2 - e_1)$.

2) Determine as dimensões do núcleo e da imagem de T .

3) Determine a matriz de T em relação às bases dadas.

Exercício 18. (Apostol seção 2.12 exercícios 11 a 18). Considere os espaços vetoriais V gerados pelas funções abaixo. Definamos $D : V \rightarrow V$ como $D(f) = \frac{df}{dx}$. Considerando a base como sendo os vetores que geram o espaço V , ache a matriz que representa D e D^2 nos seguintes casos:

- 1) V é gerado por $\{\sin(x), \cos(x)\}$.
- 2) V é gerado por $\{1, x, e^x\}$.
- 3) V é gerado por $\{1, 1+x, 1+x+e^x\}$.
- 4) V é gerado por $\{e^x, xe^x\}$.
- 5) V é gerado por $\{-\cos(x), \sin(x)\}$.
- 6) V é gerado por $\{\sin(x), \cos(x), x\sin(x), x\cos(x)\}$.
- 7) V é gerado por $\{e^x \sin(x), e^x \cos(x)\}$.
- 8) V é gerado por $\{e^{2x} \sin(3x), e^{2x} \cos(3x)\}$.

Exercício 19. (Apostol seção 2.16 exercício 6) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e calcule A^n .

Exercício 20. (Apostol seção 2.16 exercício 8) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostre que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule

A^3 , A^4 e prove por indução uma fórmula geral para A^n .

Exercício 21. (Apostol seção 2.20 exercícios 1 a 8) Ache as soluções (se existirem dos seguintes sistemas)

$$1) \begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - y + 4z = 11 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + 2y + 1z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x + 2y + 1z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ 7x + 4y + 5z = 3 \\ 1x + 1y - 1z = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x - 2y + 5z + 1u = 1 \\ 1x + 1y - 3z + 2u = 2 \\ 6x + 1y - 4z + 3u = 7 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 1x + 1y - 3z + 1u = 5 \\ 2x - 1y + 1z - 2u = 2 \\ 7x + 1y - 7z + 3u = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 1x + 1y + 2z + 3u + 4v = 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v = 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 1x - 2y + 1z + 2u = -2 \\ 2x + 3y - 1z - 5u = 9 \\ 4x - 1y + 1z - 1u = 5 \\ 5x - 3y + 2z + 1u = 3 \end{cases}$$