LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Guidorizzi vol. 3 e Apostol vol.2.

Exercício 1. (Guidorizzi seção 2.3 exercícios 1, 2 e 3)

a) Sejam A e B subconjuntos limitados de $\mathbb{R}^2$. Mostre que se B tem conteúdo nulo e $A \subset B$, então A tem conteúdo nulo.

b) Mostre que o conjunto vazio tem conteúdo nulo.

c) Mostre que todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ com um número finito de pontos tem conteúdo nulo.

Exercício 2. (Apostol seção 11.9 exercícios 1, 2, 4, 6,8)

Calcule:

a) $\int\int_Q xy(x+y)dxdy$, em que $Q = [0,1] \times [0,1]$.

b) $\int\int_Q (x^3 + 3x^2y + y^3)dxdy$, em que $Q = [0,1] \times [0,1]$.

c) $\int\int_Q sen^2(x)\, sen^2(y)\, dxdy$, em que $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

d) $\int\int_Q |cos(x+y)|\, dxdy$, em que $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

e) $\int\int_Q y^{-3} e^{\frac{tx}{y}}\, dxdy$, em que $Q = [0,t] \times [0,t]$, $t > 0$.

Exercício 3. (Apostol seção 11.9 exercício 14) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases},$$

Mostre que f é integrável e que sua integral é igual a zero.

Exercício 4. (Apostol seção 11.15 exercícios 2, 3, 4)

Calcule

a) $\int\int_Q (1+x)\, sen(y)\, dxdy$, em que Q é o trapézio de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ e $(0,1)$.

b) $\int\int_Q e^{x+y}dxdy$, em que Q é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| + |y| \leq 1\}$.

c) $\int\int_Q x^2y^2dxdy$, em que Q é a região limitada do primeiro quadrante que fica entre $xy = 1$ e $xy = 2$ e as linhas $y = x$ e $y = 4x$.

Exercício 5. (Apostol seção 11.15 exercícios 9, 10, 11, 12, 14, 15)

Faça um esboço da região de integração e mude a sua ordem para os casos abaixo:

a) $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx\right) dy$

b) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right) dy$

c) $\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)dy\right) dx$

d) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right) dx$

e) $\int_1^e \left(\int_0^{log(x)} f(x,y)dy\right) dx$

f) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy\right) dx$

Exercício 6. (Apostol seção 11.15 exercício 22) Seja $A = \int_0^1 e^{-t^2}dt$ e $B = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2}dt$. Calcule

$$I = 2\int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^x e^{-y^2}dy\right) dx$$

em termos de A e B. (Dica: Existem inteiros positivos m e n tais que $I = mA - nB + e^{-1} - e^{-\frac{1}{4}}$.

Exercício 7. (Apostol seção 11.15 exercício 24) Mude a ordem de integração e obtenha

$$\int_0^a \left(\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)dx\right) dy = \int_0^a (a-x)\, e^{m(a-x)} f(x)dx,$$

em que m e a são constantes e $a > 0$.

Exercício 8. (Apostol seção 11.22 exercício 1) Use o teorema de Green para calcular $\oint_C y^2dx + xdy$, em que
a) C é quadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$.
b) C é o quadrado de vértice $(\pm 1, \pm 1)$.
c) C é o quadrado de vértices $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$.
d) C é o círculo de raio 2 é centro na origem.
e) C é dado por $\alpha(t) = \left(2cos^3(t), 2sen^3(t)\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercício 9. (Apostol seção 11.22 exercício 2) Se $P(x,y) = xe^{-y^2}$ e $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$, calcule a integral $\oint Pdx + Qdy$ sobre a fronteira do quadrado determinado por $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$.

Exercício 10. (Apostol seção 11.22 exercício 5) Sejam f e g de classe C^1 num aberto conexo S de $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\oint_C f\nabla g.d\alpha = -\oint_C g\nabla f.d\alpha$ para toda curva de Jordan C contida em S suave por partes.

Exercício 11. (Apostol seção 11.22 exercício 6) Sejam $u, v : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 definidas no aberto S. Seja R uma região contida em S cuja fronteira é uma curva de Jordan suave por partes. Mostre que
a) $\oint_C uvdx + uvdy = \int\int_R \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dxdy.$
b) $\oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx = \int\int_R \left[u\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] dxdy.$

Observação 12. Para os dois exercícios abaixo usaremos que se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ dado por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ é uma curva de Jordan cuja derivada nunca é nula, então podemos definir sua normal como

$$n\left(\alpha(t)\right) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\left(y'(t), -x'(t)\right).$$

A derivada normal de uma função f de classe C^1 definida num aberto que contém a curva é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \langle \nabla f.n \rangle.$$

Exercício 13. (Apostol seção 11.22 exercício 7) Seja $f(x,y) = \left(Q(x,y), -P(x,y)\right)$ uma função de classe C^2 num aberto S. Seja C uma curva de Jordan contida junto com seu interior em S. Mostre que

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_C \langle f, n\rangle\, ds.$$

Exercício 14. (Apostol seção 11.22 exercício 8) Sejam $f, g : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2 definidas no aberto S. Seja R uma região contida em S cuja fronteira é uma curva de Jordan suave por partes. Prove as seguintes identidades, em que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$:
a) $\oint_C \frac{\partial g}{\partial n} ds = \int\int_R \Delta g dxdy.$
b) $\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n} ds = \int\int_R \left[f\Delta g + \nabla f.\nabla g\right] dxdy.$
c) $\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} ds = \int\int_R \left[f\Delta g - g\Delta f\right] dxdy.$

Exercício 15. (Apostol seção 11.28 exercício 6,7,8,9) Use coordenadas polares e calcule as integrais abaixo:
a) $\int_0^{2a}\left(\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx$
b) $\int_0^{a}\left(\int_0^{x}\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx$
c) $\int_0^{1}\left(\int_{x^2}^{x}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy\right)dx$
d) $\int_0^{a}\left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx\right)dy$

Exercício 16. (Apostol seção 11.28 exercício 14) Use uma mudança de coordenadas adequada para calcular a integral dupla abaixo:

$$\int\int_S (x-y)^2\, sen^2(x+y) dxdy,$$

em que S é paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$

Exercício 17. (Apostol seção 11.28 exercício 15) Um paralelogramo S no plano xy tem vértices $(0,0)$, $(2,10)$, $(3,17)$ e $(1,7)$.
a) Ache uma transformação linear $u = ax + by$, $v = cx + dy$ que mapeia S num retângulo R no plano uv com vértices opostos $(0,0)$ e $(4,2)$. O vértice $(2,10)$ deve ser mapeado num ponto do eixo u
b) Calcule a integral dupla $\int\int_S xydxdy$ transformando numa integral equivalente sobre o retângulo R do item a.

Exercício 18. (Apostol seção 11.28 exercício 16) Seja $r > 0$ e $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-u^2} du$.

a) Mostre que $I(r)^2 = \int\int_R e^{-(x^2+y^2)} dxdy$, em que R é o quadrado $[-r, r] \times [-r, r]$.

b) Se C_1 e C_2 são os círculos de raio R e raio $\sqrt{2}R$, mostre que

$$\int\int_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq I(r)^2 \leq \int\int_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

c) Usando coordenadas polares e o item *b*), mostre que $\lim_{r\to\infty} I(r) = \sqrt{\pi}$. Isto prova que $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercício 19. (Apostol seção 11.22 exercícios 17) Considere o mapa definido pelas equações:

$$x = u + v, \;\; y = v - u^2.$$

a) Calcule o determinante jacobiano $J(u, v)$.

b) Um triângulo no plano uv tem vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$. Determine por meio de um esboço, a sua imagem S no plano xy pela transformação acima.

c) Calcule a área de S por uma integral sobre S e por uma integral sobre T.

d) Calcule

$$\int\int_S (x - y + 1)^{-2}\, dxdy$$

Exercício 20. (Apostol seção 11.22 exercícios 18) Considere a mudança de coordenadas $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$.

a) Calcule $J(u, v)$.

b) Se T denota o retângulo no plano uv com vértices em $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$. Esboce a imagem S de T no plano xy.

c) Calcule a integral dupla $\int\int_C xydxdy$ fazendo a mudança de variável $x = u^2 - v^2$ e $y = 2uv$, em que C é a bola de raio 1 e centro na origem.