LISTA DE EXERCÍCIOS 3 ÁLGEBRA LINEAR - TURMA 1

www.ime.usp.br/∼pplopes/verao.html

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Hoffman/Kunze e Domingues/Callioli/Costa. Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1

Verifique se os mapas abaixo são transformações lineares:

a) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x) = (x, 2)$.

b) $F : V \to V$ dado por $F(v) = \alpha v$, em que α é um escalar fixo, $\alpha \in \mathbb{F}$.

c) $F : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ dado por $F(X) = P^{-1}XP$, em que $P \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz inversível fixa.

d) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $F(x, y, z, t) = (cos(x), y, z, t)$.

e) $F : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ dado por $F(X) = XA - AX$, em que $A \in M_n(\mathbb{F})$ é uma matriz fixa.

f) $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ dado por $F(f) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x^2 f(x)$, em que $C^\infty(\mathbb{R})$ são as funções C^∞ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

g) $F : C([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por $F(f) = \int_0^1 f(x)dx$, em que $C([0, 1], \mathbb{R})$ são as funções contínuas de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$.

Exercício 2

Para cada uma das transformações lineares abaixo determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dado por $F(x, y, z) = x + y - z$.

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (2x, x + y)$.

c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y) = (x + y, x - y, y)$.

d) $F : P_2(\mathbb{F}) \to P_2(\mathbb{F})$ dado por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.

e) $F : M_2(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ dado por $F(X) = MX + X$, em que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 3

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n. Considere $\mathbb{F}$ também como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Seja então $F : V \to \mathbb{F}$ uma transformação linear.

a) Mostre que $dim(Ker(F))$ ou é igual à n ou à $n - 1$.

b) Se $G : V \to \mathbb{F}$ é outra transformação linear e $\{F, G\}$ são elementos não nulos, linearmente dependentes em $L(V, \mathbb{F})$, então mostre que $Ker(F) = Ker(G)$.

Exercício 4

Considere o espaço das sequências em $\mathbb{F}$, denotado por $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$. Lembramos que os elementos deste espaço vetorial são as sequências $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, ...); x_i \in \mathbb{F}\}$ com as operações

$$(x_1, x_2, x_3, ...) + (y_1, y_2, y_3, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ...),$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ...).$$

Neste espaço vetorial mostre que

a) O mapa $T : \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ dado por $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ é uma transformação linear injetora, mas que não é sobrejetora.

b) O mapa $T : \mathbb{F}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ dado por $T(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$ é uma transformação linear sobrejetora, mas que não é injetora.

c) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ injetora, em que $\mathbb{F}[x]$, também denotado por $P(\mathbb{F})$, são os polinômios com coeficientes em $\mathbb{F}$.

Observação: O que ocorre neste exercício é que o espaço das sequências não é um espaço vetorial finitamente gerado, ou seja, não tem dimensão finita. Logo as equivalências entre transformações lineares injetoras, sobrejetoras e bijetoras que são válidas para transformações lineares $T : V \to V$ quando V tem dimensão finita, não são verdadeiras nestes espaços.

Exercício 5

Dado V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$, seja $F : V \to V$ uma transformação linear que satisfaz $F^2 = F$, ou seja, é tal que para todo $v \in V$ vale $F(F(v)) = F(v)$, então:

a) Mostre que $v - F(v) \in Ker(F)$

b) Usando $v = v - F(v) + F(v)$, mostre que $V = Ker(F) + Im(F)$.

c) Mostre que $Ker(F) \cap Im(F) = \{0\}$. Portanto $V = Ker(F) \oplus Im(F)$.

Exercício 6

Seja $F : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x+z, y-2z)$. Sejam $B = ((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 3, -1))$ uma base ordenada de $\mathbb{F}^3$ e $C = ((1, 5), (2, -1))$ uma base ordenada de $\mathbb{F}^2$. Ache a matriz da transformação linear F em relação às bases B e C, F_{BC}.

Exercício 7

Seja $U \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz inversível. Mostre que o mapa $F : M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ dado por $F(X) = UXU^{-1}$ é um isomorfismo.

Exercício 8

Seja $B = ((1, 0), (0, 1))$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $C = ((1, 2), (1 - 1))$ uma outra base ordenada de $\mathbb{R}^2$.

a) Seja F a transformação linear sobre $\mathbb{R}^2$, definida por $F(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Ache a matriz da transformação linear em relação à base canônica, F_B.

b) Ache a matriz de mudança de base B para C, I_{CB}, e de mudança de base C para B, I_{BC}.

c) Use as matrizes acima para determinar a matriz da transformação linear F em relação à base C, F_C.

d) Se u é um vetor com coordenadas $(1, 0)$ em relação à base C, quais são as coordenadas de $F(u)$ em relação à base C?

Exercício 9

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e W um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão $m < n$. Consideremos $F : V \to W$ e $G : W \to V$ duas transformações lineares. Qual é o maior valor que a $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F))$ pode ter? Use isto para mostrar que se $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ e $m < n$, então a matriz AB não é inversível. Isto generaliza o exercício 9 da lista 1.

Exercício 10

(i) Ache a base dual das bases

a) $B = ((1, 1, 2), (1, 2, 0), (3, 4, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

b) $B = (1, t, 1 - t^2)$ de $P_2(\mathbb{F})$.

(ii) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ o funcional linear $f(x, y, z) = x$. Quais são as coordenadas deste funcional em termos da base dual de B?

Observação: Nós sabemos que todo funcional linear em $\mathbb{R}^3$ é dado por $f((x, y, z)) = ax + by + cz$ e todo funcional linear em $P_2(\mathbb{F})$ é dado por $F(x + yt + zt^2) = ax + by + cz$. Achar a base dual é o mesmo que achar três funcionais lineares f_1, f_2 e f_3, ou seja, determinar os valores de a, b e c para cada um deles, de forma que os funcionais satisfaçam a relação $f_i(u_j) = \delta_{ij}$, em que u_j são os elementos da base B.