Exercício para entregar 3 - Matemática 3

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/∼pplopes/matematica32018

22 de novembro de 2018

Topologia do $\mathbb{R}^n$.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

1) A função f é contínua, ou seja, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $y \in \mathbb{R}^n$ é tal que $\|y - x\| < \delta$, então $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon$.

2) Dado qualquer $x \in \mathbb{R}^n$ e qualquer aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ que contenha $f(x)$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ que contém x tal que $f(V) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m,\ x \in V\} \subset U$.

3) Dado qualquer conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, o conjunto $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \in U\}$ é aberto de $\mathbb{R}^n$.

4) Dado qualquer conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^m$, o conjunto $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ f(x) \in F\}$ é fechado de $\mathbb{R}^n$. (Dica: Prove que $f^{-1}(X^c) = \left(f^{-1}(X)\right)^c$).

5) Mostre que $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e conexo. (Dica: use a função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + ... + x_n^2$ e caminhos adequados que liguem pontos de $\mathbb{S}^{n-1}$).

6) O conjunto $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ é homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$? O conjunto $\mathbb{S}^2$ é homeomorfo a um retângulo aberto $]a, b[\times]c, d[$? O que isso nos diz sobre o mapa mundi? (Dica: Use propriedades de conjuntos compactos)

7) O conjunto $\mathbb{S}^1$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$? Prove de duas maneiras diferentes:

a) Use propriedades de conjuntos compactos (Repita exercício 6)).

b) Use conexidade e obtenha uma absurdo da seguinte maneira: Suponha que exista um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$. Tire o ponto 0 de $\mathbb{R}$ e conclua que $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^1 \setminus \{h(0)\}$ continua sendo um homeomorfismo. Por que isso é um absurdo?