EXERCÍCIO 3 PARA ENTREGAR - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA42019

A objetivo é calcular o volume de uma bola unitária em $\mathbb{R}^n$ e a área de sua fronteira S^{n-1}.

Seja $\Omega = (\Omega_1, ..., \Omega_n) : U \overset{\text{aberto}}{\subset} \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ uma parametrização que cobre toda a esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}$, a não ser por um conjunto que seja indiferente para integração. [1]

1) Vamos denotar por $(\theta_1, ..., \theta_{n-1})$ os elementos de $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Mostre que, para todo $j \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\Omega_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial \theta_j} + ... + \Omega_n \frac{\partial \Omega_n}{\partial \theta_j} = 0.$$

Dica: Quanto vale $\Omega_1^2 + ... + \Omega_n^2$?

2) Seja $\varphi :]0, \infty[\times U \to \mathbb{R}^{n-1}$ dado por $\varphi(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1}) = (r\Omega_1, ..., r\Omega_n)$. Ache o Jacobiano de φ em termos de r, Ω_j e das derivadas parciais de $\frac{\partial \Omega_i}{\partial \theta_j}$ (não precisa calcular $\frac{\partial \Omega_i}{\partial \theta_j}$). Mostre que $|\det(J\varphi)| = r^{n-1}\sqrt{\det(g)}$, em que $g \in M_{n-1\times n-1}(\mathbb{R})$ é a matriz $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_j} \right\rangle$. Dica: Use o item 1) e o fato de que

$$\det(J\varphi)^2 = \det(J\varphi)\det(J\varphi) = \det\left((J\varphi)^T\right)\det(J\varphi) = \det\left((J\varphi)^T (J\varphi)\right).$$

3) Use o item acima e a fórmula de mudança de variável para integrais para mostrar o seguinte resultado: Se $f : \overline{B(0,R)} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e integrável na bola fechada de raio R, $\overline{B(0,R)}$, então[2]

$$\int_{B(0,R)} f(x)\,dx = \int_0^R \int_{S^{n-1}} f(r, \Omega)\, r^{n-1} dr dS.$$

Em particular, se existe $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(|x|)$, então

$$\int_{B(0,R)} f(x)\,dx = \text{Área}\left(S^{n-1}\right) \int_0^R g(r)\, r^{n-1} dr.$$

4) Mostre que, para $|x|^2 = x_1^2 + ... + x_n^2$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Dica: Pode usar o resultado visto em sala de aula: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

5) Defina a função Γ por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Mostre, usando Mudança de Coordenadas, que se $b > 0$, então

$$\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right) = 2\pi^{\frac{b+1}{2}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^b dr.$$

6) Escreva $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} e^{-\pi|x|^2} dx$ em coordenadas polares usando o item 3) e conclua, usando o item 4) e 5), que

$$\text{Área}\left(S^{n-1}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Usando o item 3), conclua que

$$\text{Volume}\left(B(0,1)\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

---

[1] Podemos usar, por exemplo, $\Omega :]0, \pi[^{n-2} \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^n$ dado por

$$\Omega(\theta_1, ..., \theta_{n-1}) = (\cos(\theta_1), \operatorname{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2), ..., \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)...\operatorname{sen}(\theta_{n-2})\cos(\theta_{n-1}), \operatorname{sen}(\theta_1)\operatorname{sen}(\theta_2)...\operatorname{sen}(\theta_{n-2})\operatorname{sen}(\theta_{n-1})).$$

Essas são as coordenadas polares (ou esféricas) generalizadas.

[2] Lembre-se que, numa superfície de dimensão k em $\mathbb{R}^n$ descrita por uma parametrização $\Omega : V \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, o elemento de área é dado por $dS = \sqrt{\det\left\langle \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_i}, \frac{\partial \Omega}{\partial \theta_j}\right\rangle} d\theta_1...d\theta_{n-1}$. Se $k = 2$ e $n = 3$, então vimos que isso equivale a $dS = \left\| \frac{\partial \Omega}{\partial u} \times \frac{\partial \Omega}{\partial v} \right\| dudv$.