LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Apostol e Guidorizzi.

Exercício 1. (Apostol seção 12.6 exercício 2, 3, 4 ,7, 8)
i) Calcule a área da intersecção entre o plano $x+y+z=a$ e o cilindro $x^2+y^2 \leq a$.
ii) Calcule a área da intersecção entre a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ que fica dentro do cilindro $x^2+y^2=ay$, em que $a>0$.
iii) Calcule a área da superfície $z^2=2xy$ que fica entre $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$.
iv) Calcule a área da superfície $z^2=x^2+y^2$ que fica entre os planos $z=0$ e $x+2z=3$.
v) Calcule a área da parte limitada do parabolóide $x^2+z^2=2ay$ que é cortada pelo plano $y=a$.

Exercício 2. (Apostol seção 12.10 exercício 1) Seja S o hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ e $F(x,y,z)=(x,y,0)$. Seja n a normal que aponta para fora da esfera. Calcule $\int\int F.ndS$ usando
a) a representação vetorial $\alpha(u,v)=(sen(u)cos(v), sen(u)sen(v), cos(u))$.
b) a representação explícita $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

Exercício 3. (Apostol seção 12.10 exercício 3) Ache o centro de massa de $x^2+y^2+z^2=a^2$ entre $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$.

Exercício 4. (Apostol seção 12.10 exercício 5 e 6) Seja S a superfície parametrizada por $z=f(x,y)$, em que $f: T \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $F=(P,Q,R)$ e seja n a normal unitária apontando para for a de S com componente z não negativa. Mostre que

$$\int\int_S F.ndS = \int\int_T \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R\right) dxdy,$$

em que cada P, Q e R é calculado em $(x,y,f(x,y))$.
Mostre que se $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um campo escalar, então
a) $\int\int_S \varphi dS = \int\int_T \varphi(x,y,f(x,y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$,
b) $\int\int_S \varphi dy \wedge dz = -\int\int_T \varphi(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x} dxdy$,
c) $\int\int_S \varphi dz \wedge dx = -\int\int_T \varphi(x,y,f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial y} dxdy$,

Exercício 5. (Apostol seção 12.10 exercício 7) Seja S a esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$. Calcule o valor da superfície integral

$$\int\int_S xzdy \wedge dz + yzdz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy.$$

Escolha uma parametrização de tal forma que a normal aponte para fora da esfera.

Exercício 6. (Apostol seção 12.10 exercício 4) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície plana cuja fronteira é o triângulo com vértices em $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. Seja $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z)=(x,y,z)$ e n a normal com componente z não negativa. Calcule a integral de superfície $\int\int_S F.ndS$ usando:
a) A parametrização $\varphi(u,v)=(u+v, u-v, 1-2u)$.
b) Uma parametrização da forma $z=f(x,y)$.

Exercício 7. (Apostol seção 12.10 exercício 12 e 13) Um fluido tem fluxo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (x,-2x-y,z)$. Seja S o hemisfério $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ e n a normal que aponta para fora da esfera.
a) Calcule a massa de fluido que passa por S por unidade de tempo na direção n.
b) Repita o cálculo supondo que S também contém a parte plana da base do hemisfério, supondo que nesta basa plana a normal n é igual a $-k$.

Exercício 8. (Apostol seção 12.21 exercícios 4,5,6,7,8,9) Nos exercícios abaixo n é sempre a normal que aponta para fora da superfície fechada S, na qual vale o teorema da divergência. Suponha que V seja a região que se localiza dentro da superfície S. Denotamos também $\frac{\partial f}{\partial n} = \langle \nabla f, n \rangle$ derivada direcional em direção a n e $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Assume continuidade de tantas derivadas quanto forem necessárias e prove que

a) $\int\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int\int\int_V \Delta f \, dxdydz$.

b) $\int\int_S \frac{\partial f}{\partial n} dS = 0$ se $\Delta f = 0$.

c) $\int\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int\int\int_V f \Delta g \, dxdydz + \int\int\int_V \nabla f . \nabla g \, dxdydz$.

d) $\int\int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int\int\int_V \left(f \Delta g - g \Delta f \right) \, dxdydz$.

e) $\int\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} dS = \int\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} dS$ se $\Delta f = \Delta g = 0$.

f) $\int\int_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS = \int\int\int_V \|\nabla f\|^2 \, dxdydz$ se $\Delta f = 0$.

g) $\Delta f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|V(t)|} \int\int_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n} dS$, em que $V(t)$ é a bola de raio t com centro a e $S(t)$ é a superfície de $V(t)$. O volume é denotado por $|V(t)|$.

Exercício 9. (Apostol seção 12.21 exercício 1) Seja S a superfície do cubo unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$ e seja n a normal que aponta para fora do cubo. Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dado por $F(x,y,z) = \left(x^2, y^2, z^2\right)$, use o teorema da divergência para calcular a integral de superfície $\int\int_S F.ndS$. Verifique o resultado calculando a integral de superfície diretamente.

Exercício 10. (Apostol seção 12.21 exercício 2) A esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ é intersectada pelo plano $z = 3$. A menor porção é formada por um sólido V limitado por uma superfície S composta por uma parte esférica S_1 e outra plana S_2. Seja n a normal que aponta para fora de V.

a) Calcule $\int\int_{S_1} (xz, yz, 1) . ndS$.

b) Calcule $\int\int_{S_2} (xz, yz, 1) . ndS$.

c) Calcule $\int\int_S (xz, yz, 1) . ndS$ usando os resultados de a) e b) e, depois, usando o teorema da divergência.

Exercício 11. (Apostol seção 12.21 exercício 3) Seja V um aberto limitado em $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira é uma superfície compacta onde vale o teorema da divergência. Seja n a normal que aponta para fora de V. Assuma que o centro de massa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ e o volume $|V|$ de V sejam conhecidos. Calcule em função de $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ e $|V|$ as integrais abaixo:

a) $\int\int_S (x, y, z) . ndS$

b) $\int\int_S \left(xz, 2yz, 3z^2\right) . ndS$

c) $\int\int_S \left(y^2, 2yz, -xz\right) . ndS$

Exercício 12. (Apostol seção 12.13 exercícios 1, 2, 3 e 4) Nos exercícios abaixo, transforme a integral $\int\int \nabla \times F.ndS$ numa integral de linha e calcule a integral. Use o teorema de Stokes.

a) $F(x,y,z) = \left(y^2, xy, xz\right)$, em que S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, n é a normal que aponta para cima.

b) $F(x,y,z) = (y, z, x)$, em que S é o hemisfério $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$, n é a normal que aponta para cima.

c) $F(x,y,z) = (y - z, yz, -xz)$, em que S consiste nas 5 faces do cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ que não estão no plano xy. n é a normal que aponta para fora.

d) $F(x,y,z) = \left(xz, -y, x^2 y\right)$, em que S consite nas 3 faces do tetraedro que não estão no plano xz. O tetraedro é limitado pelos planos coordenados e o plano $3x + y + 3z = 6$. n é a normal que aponta para fora.

Exercício 13. (Apostol seção 12.13 exercício 5, 6, 7, 8, 9 e 10) Use o teorema de Sotkes para calcular as integrais abaixo. Explique qual o sentido de C é necessário para chegar na resposta.

a) $\int_C ydx + zdy + xdz = \pi a^2 \sqrt{3}$, em que C é a curva da intersecção entre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e o plano $x + y + z = 0$.

b) $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$, em que C é a curva da intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ e o plano $y = z$.

c) $\int_C y^2 dx + xydy + xzdz = 0$, em que C é a curva do item b).

d) $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = 2\pi a(a + b)$, em que C é a curva da intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ e o plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, $a > 0$ e $b > 0$.

Exercício 14. (Apostol seção 12.21 exercício 11) Seja V uma região convexa de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira é uma superfície compacta e n é a normal apontando para fora de S. Seja $F, G : V \to \mathbb{R}^3$ campos vetoriais diferenciáveis tais que

$$\nabla \times F = \nabla \times G, \; \nabla . F = \nabla . G \text{ em } V, \; F.n = G.n \text{ em } S.$$

Prove que $F = G$ em V. (Dica: Defina $H = F - G$ e conclua que $H = \nabla \varphi$. Use uma identidade apropriada e prove que $\int\int\int \|\nabla f\|^2 dx = 0$. Conclua que $H = 0$).

Exercício 15. (Apostol seção 12.21 exercício 12) Seja $G : V \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial diferenciável e duas funções $f, g : V \to \mathbb{R}$ num aberto V limitado por uma superfície limitada S. Seja n a normal que aponta para fora de S.

Prove que existe no máximo um campo vetorial tal que

$$\nabla \times F = G,\ \nabla . F = g \,\text{em}\, V,\ F.n = f \,\text{em}\, S.$$

Exercício 16. (Apostol seção 12.15 exercício 3) Se $r = (x, y, z)$ e A é um vetor constante, mostre que $\nabla \times (A \times r) = 2A$.

Exercício 17. (Apostol seção 12.21 exercício 8) Sejam F e $G : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dois campos vetoriais de classe C^1. Prove que

$$\nabla . (F \times G) = G. (\nabla \times F) - F. (\nabla \times G) .$$

Exercício 18. (Apostol seção 12.15 exercício 4) Se $r = (x, y, z)$, ache todos os n tais que $div \left(\|r\|^n r \right) = 0$.

Exercício 19. (Apostol seção 12.15 exercício 12) Mostre que o teorema de Green pode ser expresso como

$$\int \int (\nabla \times V) .k \, dxdy = \oint_C V.T ds,$$

em que T é o vetor unitário tangente a C e ds indica a integral sobre o comprimento de arco.

Exercício 20. (Apostol seção 12.17 exercício 8) Assuma diferenciabilidade dos campos vetoriais e que eles estejam definidos num conjunto $\Omega =]a_1, a_2[\times]b_1, b_2[\times]c_1, c_2[$. Suponha que $H, F, G : \Omega \to \mathbb{R}^3$ sejam tais que

$$H = F + G,\ \nabla . F = 0,\ \nabla \times G = 0.$$

Logo existem U e φ tais que $F = \nabla \times U$ e $G = \nabla \varphi$. Mostre que U e φ satisfazem as seguintes EDPs:

$$\Delta \varphi = \nabla . H \text{ e } \nabla (\nabla . U) - \Delta U = \nabla \times H$$