LISTA DE EXERCÍCIOS 4 ÁLGEBRA LINEAR - TURMA 1.

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Hoffman/Kunze e Domingues/Callioli/Costa. Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1
Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$. Sejam $\langle , \rangle_1 : V \times V \to \mathbb{F}$ e $\langle , \rangle_2 : V \times V \to \mathbb{F}$ dois produtos internos de V. Mostre que

a) A função $\langle , \rangle_3 : V \times V \to \mathbb{F}$ definida como $\langle u, v\rangle_3 = \langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2$ é um produto interno.

b) A função $\langle , \rangle_3 : V \times V \to \mathbb{F}$ definida como $\langle u, v\rangle_3 = \alpha \langle u, v\rangle_1$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número maior do que 0, é um produto interno.

c) Se $T : V \to V$ é uma transformação linear injetora, então a função $\langle , \rangle_T : V \times V \to \mathbb{F}$ definida como $\langle u, v\rangle_T = \langle T(u), T(v)\rangle_1$ é um produto interno.

d) A função $\langle , \rangle_3 : V \times V \to \mathbb{F}$ definida como $\langle u, v\rangle_3 = 0$ não é um produto interno.

e) Os produtos internos em $\mathbb{F}$ com a soma e o produto por escalares definidos acima não formam um subespaço vetorial das funções de $V \times V$ em $\mathbb{F}$ com a soma e o produto por escalares definidos usualmente.

Exercício 2
Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno e $F : V \to V$ uma transformação linear.

a) Mostre que se $\langle F(u), v\rangle = 0$ para todo u e $v \in V$, então F é a transformação linear nula.

Agora suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ e que $\langle F(u), u\rangle = 0$ para todo $u \in V$.

b) Mostre que $0 = \langle F(\alpha u + v), \alpha u + v\rangle = \overline{\alpha} \langle F(v), u\rangle + \alpha \langle F(u), v\rangle$ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, u e $v \in V$.

c) Usando os valores $\alpha = 1$ e $\alpha = i$, conclua que $\langle F(u), v\rangle = 0$ para todo u e $v \in V$. Logo $F = 0$.

Agora suponha que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Considere $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear $F(x, y) = (y, -x)$.

d) Mostre que $\langle F(u), u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

Responda, usando os resultados dos itens anteriores, a seguinte questão

e) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Sejam $F : V \to V$ e $G : V \to V$ transformações lineares tais que $\langle F(u), u\rangle = \langle G(u), u\rangle$ para todo $u \in V$. Mostre que se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então $F = G$ e que se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então isto não é necessariamente verdade. (Use que $\langle F(u), u\rangle = \langle G(u), u\rangle$ para todo $u \in V$ se, e somente se, $\langle (F - G)(u), u\rangle = 0$ para todo $u \in V$).

Exercício 3
Encontrar as normas de u e v, a distância de u a v e o ângulo entre u e v nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1, 1, 1)$ $v = (0, 0, 1, 1)$ com o produto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

b) $u = 1 + t - t^2$ e $v = 3t^2$ com o produto interno de $P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u(t)v(t)dt.$$

c) $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ com o produto interno de $M_2(\mathbb{R})$ definido em aula, ou seja,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} = Tr\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \right).$$

Exercício 4

Determinar uma base ortonormal de cada um dos seguintes subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$ utilizando o processo de Gram-Schmidt:

a) $W = [(1,1,0,0),(0,1,2,0),(0,0,3,4)]$.

b) $W = [(2,0,0,0),(1,3,3,0),(3,-3,-3,0)]$.

Exercício 5

Seja o espaço $P_2(\mathbb{F})$ com o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

a) Ortonormalizar a base $\{1, 1+t, 2t^2\}$.

b) Achar o complemento ortogonal do subespaço $W = [5, 1+t]$.

Exercício 6

Seja $W = \{(x,y,z,t);\ x-y-z=0 \text{ e } z-2t=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

a) Ache uma base e a dimensão do subespaço W dado acima.

b) Usando Gram-Schmidt, ache uma base ortonormal de W.

c) Determine o operador de projeção ortogonal de $\mathbb{R}^4$ em W.

d) Determine a projeção ortogonal do vetor $(1,1,0,-1)$ sobre o subespaço W.

Exercício 7

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Sejam $T: V \to V$ e $S: V \to V$ isometrias.

a) Mostre que $S \circ T: V \to V$ e $T^{-1}: V \to V$ também são isometrias.

b) Seja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Dados u e $v \in V$ vetores não nulos, então mostre que o ângulo entre u e v é igual ao ângulo entre $T(u)$ e $T(v)$.

c) Mostre que se $T: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ é uma transformação linear dada por $T(A) = AM$, em que M é uma matriz unitária ($M^*M = MM^* = I_n$), então T é uma isometria no produto interno $\langle A, B\rangle = Tr(AB^*)$.

Exercício 8

Seja H um subespaço vetorial de um espaço vetorial finitamente gerado V com produto interno. Então cada $v \in V$ pode ser escrito de maneira única como

$$v = h + t,$$

em que $h \in H$ e $t \in H^\perp$, pois $V = H \oplus H^\perp$. Considere a aplicação $A: V \to V$ definida por

$$A(v) = h - t$$

para todos os $v \in V$.

a) Mostre que A é linear e é auto-adjunta.

b) Se $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual e $H = [(1,1,0)]$, ache a matriz de A em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com produto interno. Se $T \in L(V)$ é um automorfismo e T é auto-adjunta, então T^{-1} também é auto-adjunta.

Exercício 10

Seja V um espaço vetorial n dimensional sobre $\mathbb{R}$ com produto interno.

a) Mostre que dado $v \in V$, então a função $f_v: V \to \mathbb{R}$ dada por $f_v(u) = \langle u, v\rangle$ é um funcional linear.

b) Mostre que a aplicação $T: V \to V^*$ (V^* é o dual de V) dada por $T(v) = f_v$ é um isomorfismo.