LISTA DE EXERCÍCIOS 4 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados do capítulo 3 do livro do Apostol.

Exercício 1. (Apostol seção 3.17 exercícios 1 e 2) Para cada uma das matrizes abaixo, determine a matriz dos cofatores e a inversa:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercício 2. (Apostol seção 3.17 exercício 4) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. Prove as seguintes propriedades da matriz $cof(A)$ dos cofatores de A:

a) $cof\left(A^T\right) = cof\,(A)^T$.

b) $cof\,(A)^T A = \det(A)\, I$.

c) $A\,(cof\,(A))^T = (cof\,(A))^T A$.

Exercício 3. (Apostol seção 3.17 exercício 5) Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ -y + z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 3 \\ 2x + 5y + 3z = 4 \end{cases}$

Exercício 4. (Apostol seção 4.4 exercícios 1) Sejam $T : V \to V$, $T_1 : V \to V$ e $T_2 : V \to V$ transformações lineares.

a) Se λ é uma autovalor de T, então $a\lambda$ é um autovalor de aT.

b) Se $v \in V$ é um autovetor para T_1 e para T_2, então v também é um autovetor para $aT_1 + bT_2$.

Exercício 5. (Apostol seção 4.4 exercícios 2) Sejam $T : V \to V$ uma transformação linear, $v \neq 0$ e λ tal que $Tv = \lambda v$. Seja $p(T) = \sum_{n=0}^{N} a_n T^n$. Mostre que v é um autovetor de $p(T)$ com autovalor $p(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_n \lambda^n$.

Exercício 6. (Apostol seção 4.4 exercícios 4) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e λ^2 um autovalor de T^2. Mostre que λ ou $-\lambda$ são autovalores de T. (Dica: $T^2 - \lambda^2 I = (T + \lambda I)(T - \lambda I)$)

Exercício 7. (Apostol seção 4.4 exercícios 5, 7, 8, 9) Para cada uma das situações abaixo, considere V um espaço vetorial, $T : V \to V$ uma transformação linear e ache os autovalores e autovetores de T:

a) $V = C^\infty(]0,1[)$, $Tf = t\frac{df}{dt}$.

b) $V = \left\{f \in C(\mathbb{R}),\ \exists \int_0^x f(t)\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}\right\}$, $Tf = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$.

c) $V = \left\{f \in C(\mathbb{R}),\ \exists \int_0^x tf(t)\,dt,\ \forall x \in \mathbb{R}\right\}$, $Tf = \int_{-\infty}^x tf(t)\,dt$.

d) $V = \{f \in C^\infty([0,1]),\ f(0) = f(\pi) = 0\}$, $Tf = \frac{d^2 f}{dt^2}$.

Exercício 8. (Apostol seção 4.4 exercícios 11 e 12) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear.

a) Mostre que se u e v são autovalores associados a λe μ, $\lambda \neq \mu$, respectivamente, então se $au + bv$ é um autovetor de T se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$.

b) Mostre que se todo elemento de V diferente de 0 é uma autovetor de T então $T = cI$. (Dica: use a))

Exercício 9. (Apostol seção 4.8 exercícios 1,2,3,7) Para cada uma das matrizes abaixo, determine os autovalores, os autovetores e a dimensão do autoespaço.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $a, b > 0$.

f) $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

Exercício 10. (Apostol seção 4.8 exercícios 8) Calcule os autovalores das matrizes abaixo:

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercício 11. (Apostol seção 4.8 exercícios 10) Prove que A e A^T têm o mesmo polinômio característico, em que A é uma matriz quadrada.

Exercício 12. (Apostol seção 4.8 exercícios 11) Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que se A é invertível, então AB e BA têm os mesmos autovalores.

Exercício 13. (Apostol seção 4.8 exercícios 12) Seja A uma matriz $n \times n$. Prove que $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + ...$, ou seja, o termo que multiplica λ^{n-1} é igual a $-tr(A)$.

Exercício 14. (Apostol seção 4.8 exercícios 13) Sejam A e B matrizes $n \times n$ com o mesmo traço e o mesmo determinante. Mostre que se $n = 2$, então ambas as matrizes têm o mesmo polinômio característico, porém isso não é necessariamente verdade se $n \geq 3$.

Exercício 15. (Apostol seção 4.8 exercícios 14) Prove as seguintes propriedades do traço:

a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

b) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$, para α um número.
c) $tr(AB) = tr(BA)$.
d) $tr(A^T) = tr(A)$.

Exercício 16. (Apostol seção 4.10 exercícios 1) Prove que as seguintes matrizes possuem os mesmos autovalores, mas não são similares: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 17. (Apostol seção 4.10 exercícios 2) Em cada um dos casos abaixo, ache uma matriz $C \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $C^{-1}AC$ é uma matriz diagonal ou explique por que uma tal matriz não existe.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercício 18. (Apostol seção 4.10 exercícios 4) Em cada um dos casos, mostre que as matrizes têm 3 autovetores linearmente indenpendentes, porém não possuem 3 autovalores distintos. Ache uma matriz C tal que $C^{-1}AC$ é diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 19. (Apostol seção 4.10 exercícios 7) Ache os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ e mostre que ela não é diagonalizável.

Exercício 20. (Apostol seção 4.10 exercício 8) Dado uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -I$, prove as seguintes afirmações:
a) A é invertível.
b) n é par.
c) A não tem autovalores reais.
d) $det(A) = 1$