LISA DE EXERCÍCIOS 4 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Exercício 1. (Guidorizzi seção 40.1 exercícios 1) Sejam $B = \{(x,y,z)\,; x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$, σ a fronteira de B e $F(x,y,z) = (x,y,z)$. Verifique que

$$\int\int_\sigma F.ndS = \int\int\int \nabla.F dxdydz,$$

onde n é a normal que aponta para fora de B.

Exercício 2. (Guidorizzi seção 40.1 exercícios 2) Seja $\sigma(u,v) = (u,v,4-u^2-v^2)$, $u^2+v^2 \leq 1$ e seja $\Gamma(t) = (cos(t), sen(t), 3)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Considere o campo vetorial $F(x,y,z) = (1, x+y+z, 0)$.

a) Desenhe as imagens de σ e Γ.

b) Verifique que

$$\int\int_\sigma \nabla \times F.ndS = \int_\Gamma F.d\Gamma,$$

onde n é a normal $n = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}$.

Exercício 3. (Guidorizzi seção 40.1 exercícios 2) Sejam $\sigma_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\sigma_2 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ duas parametrizações de classe C^1 com mesma imagem e F um campo vetorial de classe C^1 definido num aberto que contém a superfície definida pelas parametrizações. Mostre que

$$\int\int_{\sigma_1} F.ndS = \int\int_{\sigma_2} F.ndS.$$

(Dica: Sejam (u,v) as variáveis de σ_1 e (s,t) as variáveis de σ_2. Prove e use a relação $\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}\times\frac{\partial\sigma_1}{\partial v} = \frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)}\frac{\partial\sigma_2}{\partial s}\times\frac{\partial\sigma_2}{\partial t}$).

Exercício 4. (Guidorizzi seção 40.2 exercícios 1) Seja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vetorial de classe C^1 num aberto Ω e seja $B \subset \Omega$ um compacto ao qual o teorema da divergência se aplica. Seja σ a fronteira de B com normal n apontando para fora de B. Calcule

$$\int\int_\sigma \nabla \times u.ndS.$$

Exercício 5. (Guidorizzi seção 40.2 exercícios 3) Seja $r(x,y,z) = (x,y,z)$ e seja B um compacto ao qual o teorema da divergência se aplica. Prove que

$$vol(B) = \frac{1}{3}\int\int_\sigma r.ndS,$$

em que σ é a fronteira de B com normal exterior de n.

Exercício 6. (Guidorizzi seção 41.1 exercícios 3) Utilizando o teorema de Stokes, transforme a integral $\int\int_\sigma \nabla \times F.ndS$ numa integral de linha e calcule-a no seguintes casos:

a) $F(x,y,z) = (0,0,y)$, $\sigma(u,v) = (u,v,u^2+v^2)$, com $u^2+v^2 \leq 1$, sendo n a normal apontando para cima.

b) $F(x,y,z) = (y,-x^2,5)$, $\sigma(u,v) = (u,v,1-u^2)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 1$, sendo n a normal apontando para cima.

c) $F(x,y,z) = (y,x^2,z)$, $\sigma(u,v) = (u,v,2u+v+1)$, com $u \geq 0$, $v \geq 0$ e $u+v \leq 2$, sendo n a normal apontando para baixo.

d) $F(x,y,z) = (y,x^2,z)$, σ a superfície $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$e $y \geq 0$, sendo n a normal com componente $y \geq 0$.

e) $F(x,y,z) = (0,x,0)$, σ a superfície $0 \leq z \leq 1$, $x^2+y^2 = 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, sendo n a normal com componente x positiva.

Exercício 7. (Guidorizzi seção 41.1 exercícios 4) Seja $F(x,y,z) = \left(xz^2, z^4, yz\right)$ e seja σ a superfície $x^2+y^2+z^2 = 4$ com $\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{3}$, com n a normal apontando para cima. Calcule $\int\int_\sigma \nabla \times F.ndS$.

Exercício 8. (Guidorizzi seção 41.1 exercícios 5) Seja $F(x,y,z) = \left(0,0,x^3\right)$ e seja σ a superfície $z = y+4$ com $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, com n a normal apontando para baixo. Calcule $\int\int_\sigma \nabla \times F.ndS$.

Exercício 9. Faça os exercícios 1 ao 11 da página 244 do livro Introdução à Mecânica Clássica (Artur Lopes). Editora EDUSP.