LISTA DE EXERCÍCIOS 5 ÁLGEBRA LINEAR - TURMA 1

www.ime.usp.br/∼pplopes/verao.html
Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Hoffman/Kunze e Domingues/Callioli/Costa. Como na aula $\mathbb{F}$ é sempre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercício 1
Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz cujas linhas são A_1, ..., A_n. Como em sala de aula denotamos $A = (A_1, ..., A_n)$. Usando a linearidade em cada uma das linhas (n-linearidade do determinante) e a propriedade do determinante de ser alternado:

a) Prove que se λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{F}$, então $\det(\lambda_1 A_1, ..., \lambda_n A_n) = \lambda_1 ... \lambda_n \det(A_1, ..., A_n)$.

b) Prove que $\det(A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n) = \det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.

c) Prove que se $n = 3$, então $\det(A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_1 - A_3, A_3 - A_1 - A_2) = -4\det(A_1, A_2, A_3)$.

Exercício 2
Seja $A = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (b\ b\ \ldots b) \in M_n(\mathbb{F})$. Quanto é $\det(A)$?

Exercício 3
Seja $A \in M_n(\mathbb{F})$ uma matriz tal que $A + A^t = 0$. Mostre que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. O que acontece se n é ímpar?

Exercício 4
Dados os operadores lineares abaixo, calcule os determinantes pedidos:

a) Para a transformação linear $F : P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$ dada por $F(1) = 2 + t$ e $F(t) = 3 + 3t$, escreva a matriz de F na base canônica e calcule o determinante de F.

b) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensão n e $\lambda \in \mathbb{F}$. Seja $H_\lambda : V \to V$ a transformação linear dada por $H_\lambda(v) = \lambda v,\ \forall v \in V$. Escreva a matriz de H_λ em relação a uma base qualquer e calcule o determinante de H_λ.

c) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z, x + y + z)$. Escreva a matriz de F na base canônica e calcule $\det(F)$ e $\det(F^2)$.

d) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ finitamente gerado. Seja $F : V \to V$ uma transformação linear tal que $F^2 = F$. Quais são os possíveis valores de $\det(F)$?

e) Seja $V = M_n(\mathbb{F})$ o espaço vetorial das matrizes quadradas n por n. Seja $B \in M_n(\mathbb{F})$ e $F_B : V \to V$ a transformação linear dada por $F_B(A) = AB - BA$. Mostre que $\det(F_B) = 0$.

Exercício 5
Calcule o determinante das matrizes
a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{pmatrix}$.

Note que usando o que foi visto em sala de aula, o determinante das matrizes de b) e c) podem ser calculados com muito poucas contas, ou mesmo sem cálculo algum no caso c).

Exercício 6

Achar os auto-valores e os auto-vetores do operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por:

a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

b) $T(x, y) = (-x, -y)$.

c) $T(1, 0) = (0, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

Achar os auto-valores e os auto-vetores do operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por:

d) $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$.

e) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

Exercício 7
Calcular o polinômio característico e os auto-valores da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 8
Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{C}$ com produto interno.

a) Mostre que se $A : V \to V$ é um operador auto-adjunto, então seus auto-valores são reais. (Use que se $u \in V$ é um auto-vetor, então $Au = \lambda u$ e $\langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle$).

b) Mostre que se $A : V \to V$ é uma isometria, então seus auto-valores têm módulo 1. (Use que se $u \in V$ é um auto-vetor, então $Au = \lambda u$ e $\langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle$).

c) Seja $T : V \to V$ é um operador qualquer de V, mostre que se λ é um auto-valor de V, então λ^n é um auto-valor de T^n. Mostre também que se $p(t) = a_o + a_1 t + ... + a_n t^n$ é um polinômio, então $p(\lambda)$ é um auto-valor do operador $p(t) = a_o + a_1 T + ... + a_n T^n$.

Exercício 9
Determinar, se possível, uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal, nos seguintes casos:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Determinar uma matriz $M \in M_2(\mathbb{C})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal, no seguinte caso:

c) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 10

a) Determinar $M \in M_3(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}AM$ seja diagonal onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Determinar $M^{-1}AM$.

b) Achar uma matriz diagonal semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$