LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados do Apostol.

Exercício 1. (Apostol, capítulo 5.5, exercícios 3 e 4) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita (real ou complexo), $T : V \to V$ e $S : V \to V$ operadores auto-adjuntos.

a) Mostre que T^n também é auto-adjunto.

b) Mostre que se T for invertível, então T^{-1} também é auto-adjunto.

c) Mostre que $aT + bS$ é auto-adjunto, se a e b pertencerem a $\mathbb{R}$.

d) Mostre que ST é auto-adjunto se $ST = TS$.

Exercício 2. (Apostol, capítulo 5.5, exercícios 5 e 6)

a) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $T(i) = i$, $T(j) = j$ e $T(k) = -k$. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar usual. Mostre que T é auto-adjunta.

b) Seja $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ uma transformação linear dada por $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, em que $C([0,1])$ é o espaço vetorial das funções reais contínuas com produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$. Mostre que existe o operador adjunto e $T^* = -T$.

Exercício 3. (Apostol, capítulo 5.5, exercício 9) Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno e dimensão finita. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear e $Q : V \to \mathbb{C}$ definida como

$$Q(v) = \langle Tv, v\rangle .$$

a) Se T é autoadjunta, mostre que a imagem de Q é sempre real.

b) Se $T^* = -T$, mostre que a imagem de Q é sempre imaginária pura.

c) Mostre que $Q(\lambda v) = |\lambda|^2 Q(v)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

d) Prove que $Q(u + v) = Q(u) + Q(v) + \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle$. Ache uma fórmula para $Q(u + \lambda v)$, em que $\lambda \in \mathbb{C}$.

e) Prove que se $Q(u) = 0$ para todo u, então $T = 0$.

f) Prove que se a imagem de Q é sempre real, então T é autoadjunta.

Exercício 4. (Apostol, capítulo 5.11, exercício 2)

a) Verifique que a matriz $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ é ortogonal.

b) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que corresponde à matriz A. Mostre que T leva um ponto com coordenadas polares (r, α) no ponto com coordenadas polares $(r, \alpha + \theta)$.

Exercício 5. (Apostol, capítulo 5.11, exercícios 5 a 8) Para cada uma das matrizes abaixo, ache um conjunto de autovalores ortogonais e uma matriz unitária U tal que $U^{-1}AU$ é diagonal.

a) $A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 6. (Apostol, capítulo 5.11, exercício 12) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Se A é autoadjunta e todos os autovalores são iguais a $\lambda \in \mathbb{R}$, mostre que $A = \lambda I$.

Exercício 7. (Apostol, capítulo 5.11, exercício 14) Para cada uma das afirmações, prove ou dê um contraexemplo. Abaixo A e B são matrizes em $M_{n\times n}(\mathbb{C})$:

a) Se A e B são unitárias, então $A + B$ é unitária.
b) Se A e B são unitárias, então AB é unitária.
c) Se A e AB são unitárias, então B é unitária.
d) Se A e B são unitárias, então $A + B$ não é unitária.

Exercício 8. (Apostol, capítulo 5.15, exercício 1 a 7) Para cada uma das fomas quadráticas abaixo, ache uma matriz autoadjunta associada, os autovalores da matriz, uma base ortonormal de autovetores e uma matriz unitária que a diagonaliza.
a) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$
b) x_1x_2
c) $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$
d) $34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$
e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
f) $2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$
g) $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$

Exercício 9. (Apostol, capítulo 5.20, exercício 2) Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz unitária (ou seja, ortogonal). Mostre que
a) Se λ é um autovalor de A, então λ é igual a 1 ou -1.
b) Se λ é um autovalor de A, então $\overline{\lambda}$ também é um autovalor de A.
c) Se n é ímpar, então A tem ao menos um autovalor real.

Exercício 10. (Apostol, capítulo 5.20, exercício 3) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear unitária tal que $det\left([T]_{\mathcal{B}}\right) = 1$, em que $\mathcal{B}$ é a base canônica. Mostre que se n é ímpar, então 1 é um autovalor de T. (Dica: Use o exercício 9)

Exercício 11. (Apostol, capítulo 5.20, exercício 5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se $T : V \to V$ uma transformação linear que preserva a norma, então T é unitária.

Exercício 12. (Apostol, capítulo 5.20, exercício 6) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Se $T : V \to V$ é unitária e autoadjunto, então $T^2 = I$.

Exercício 13. (Apostol, capítulo 5.20, exercício 7) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Sejam $(e_1, ..., e_n)$ e $(u_1, ..., u_n)$ duas bases ortonormais de V. Mostre que existe um operador unitário que leva uma base na outra.

Exercício 14. (Apostol, capítulo 7.4, exercício 2 e 3) Sejam P e Q funções de $\mathbb{R}$ com valores em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que
a) $(P + Q)' = P' + Q'$.
b) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
c) $\left(Q^{-1}\right)' = -Q^{-1}Q'Q^{-1}$.
d) $\left(PQ^{-1}\right)' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$.
f) $\left(P^3\right)' = P'P^2 + PP'P + P^2P'$.

Exercício 15. (Apostol, capítulo 7.4, exercício 11) Seja $D \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz diagonal: $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Mostre que se $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ converge, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = diag\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k, ..., \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k\right).$$

Exercício 16. (Apostol, capítulo 7.12, exercícios 1 a 5, 8 a 10) Calcule e^{tA} nos seguintes casos:
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

h) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 17. (Apostol, capítulo 7.12, exercício 7) Seja $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mostre que $\frac{d}{dt} e^{A(t)}$ é diferente de $e^{A(t)} A'(t)$ e de $A'(t) e^{A(t)}$.

Exercício 18. (Apostol, capítulo 7.15, exercícios 8, 9, 11 e 14) Resolva os sistemas $Y'(t) = AY(t)$ abaixo com as condições iniciais dadas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 19. (Apostol, capítulo 7.17, exercício 1) Seja Z uma solução do sistema não homogêneo

$$Z'(t) = AZ(t) + Q(t)$$

num intervalo J com valor inicial $Z(a)$. Prove que existe uma única solução do problema

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)$$

com valor inicial $Y(a)$ e que esta solução é dada pela fórmula

$$Y(t) = Z(t) + e^{(t-a)A} \left(Y(a) - Z(a) \right).$$

Exercício 20. (Apostol, capítulo 7.17, exercício 2)

a) Prove que a solução do sistema

$$Y'(t) = AY(t) + C, \;\; Y(a) = B$$

é dada por

$$Y(t) = e^{(t-a)A} B + \left(\int_a^t e^{sA} ds \right) C.$$

b) Prove que se A for uma matriz inversível, então $\int_a^t e^{sA} ds = \left(e^{(t-a)A} - I \right) A^{-1}$.

c) Calcule $Y(t)$ explicitamente quando

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}, \; a = 0$$

Exercício 21. (Apostol, capítulo 7.20, exercício 1) Seja p uma função com valores reais. Prove que

$$Y'(t) = p(t)AY(t) + Q(t), \;\; Y(a) = B$$

tem solução

$$Y(t) = e^{q(t)A} B + e^{q(t)A} \int_a^t e^{-q(s)A} Q(s) ds,$$

em que $q(t) = \int_a^t p(s) ds$.

Exercício 22. (Apostol, capítulo 7.20, exercício 3) Seja $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma função e $E(t) = e^{A(t)}$. Assuma que $E(t)' = A(t)'E(t)$. Prove que

$$Y'(t) = A(t)'Y(t) + Q(t), \;\; Y(a) = B$$

tem solução

$$Y(t) = e^{A(t)}e^{-A(a)}B + e^{A(t)}\int_a^t e^{-A(s)}Q(s)ds.$$