LISTA DE EXERCÍCIOS 5 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Apostol.

Exercício 1. (Apostol seção 13.4 exercício 4) Seja $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ uma função finitamente aditiva agindo em conjuntos Booleanos $\mathcal{B}$ de S. Mostre, usando indução finita, que

$$f\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(A_k\right),$$

em que os conjuntos A_k são disjuntos.

Exercício 2. (Apostol seção 13.4 exercícios 5, 6, 7 e 8) Seja S um conjunto.

a) Dado $A = \{a\} \subset S$, mostre que $\mathcal{B} = \{\emptyset, S, \{a\}, \{a\}^c\}$ é a menor álgebra Booleana que contém A.

b) Dados $A_1 = \{a_1\}$ e $A_2 = \{a_2\}$, qual é a menor álgebra Booleana que contém A_1 e A_2?

c) Dados $A_1 = \{a_1\}$, $A_2 = \{a_2\}$ e $A_3 = \{a_3\}$, qual é a menor álgebra Booleana que contém A_1, A_2 e A_3?

d) Dados $A_1 = \{a_1\}$, ... $A_k = \{a_k\}$, mostre que a menor álgebra Booleana que contém todos estes conjuntos tem 2^{k+1} elementos se S tem mais do que k elementos, e tem 2^k elementos se S tem exatamente n elementos.

Exercício 3. (Apostol seção 13.4 exercícios 10) Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto S. Definimos a diferença simétrica de A e B por $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Prove as propriedades abaixo:

a) $A \triangle B = B \triangle A$.

b) $A \triangle A = \emptyset$.

c) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

d) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

e) Se $f : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ é uma função finitamente aditiva numa álgebra Booleana $\mathcal{B}$ que contém A e B, então

$$f(A \triangle B) = f(A) + f(B) - 2f(A \cap B).$$

Exercício 4. (Apostol seção 13.7 exercícios 14 e 16)

a) Sejam A e B eventos. Mostre que

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

.

b) Sejam A, B e C eventos. Mostre que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Exercício 5. (Apostol seção 13.9 exercícios 4) Jogando dois dados qual a probabilidade da soma dos dados pertencer ao conjunto $\{7, 11, 12\}$?

Exercício 6. (Apostol seção 13.9 exercícios 5, 6 e 7) Uma pessoa está jogando Pôquer com um baralho usual de 52 cartas, 13 de cada naipe, sendo cada naipe enumerado com $\{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K\}$. A pessoa possui 5 cartas.

a) Suponha que a pessoa possua quatro cartas de copas e uma de espada. Qual a probabilidade dela descartar a carta fora da sequência e pegar uma nova carta de tal forma que ela obtenha mais uma copas?

b) Suponha que a pessoa possua quatro cartas em sequência, não necessariamente do mesmo naipe, (mas que não sejam A234, nem JQKA) e uma fora da sequência. Qual a probabilidade dela descartar a carta fora da sequência e pegar uma nova carta que complete a sequencia?

c) Suponha que a pessoa possua quatro cartas em sequência, não necessariamente do mesmo naipe, mas com uma falha na sequência (por exemplo, 5689) e uma carta fora da sequência. Qual a probabilidade dela descartar a carta fora da sequência e pegar uma nova carta que complete a sequencia?

Exercício 7. (Apostol seção 13.9 exercícios 9) Uma urna contém quatro pedras vermelhas e duas pedras brancas. Retiramos duas pedras dessa urna.

a) Qual a probabilidade de ambas serem brancas?
b) Qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?
c) Qual a probabilidade de ambas serem da mesma cor?
d) Qual a probabilidade de que ao menos uma seja vermelha?

Exercício 8. (Apostol seção 13.9 exercícios 13) Seja A um evento. Dizemos que a probabilidade a favor de A é a de para b se $\frac{P(A)}{P(A^c)} = \frac{a}{b}$. Dizemos que a probabilidade contra A é a de para b se $\frac{P(A^c)}{P(A)} = \frac{a}{b}$. Dados dois eventos A e B. Se a probabilidade contra A é de 2 para 1 e a probabilidade a favor de $A \cup B$ é de 3 para 1, mostre que

$$\frac{5}{12} \leq P(B) \leq \frac{3}{4}.$$

Dê um exemplo em que $P(B) = \frac{5}{12}$ e outro em que $P(B) = \frac{3}{4}$.

Exercício 9. (Apostol seção 13.11 exercício 3) Um comitê do senado composto de 6 democratas e 4 republicanos deve escolher um presidente e um vice-presidente. De quantas maneiras esse par pode ser escolhido de tal forma que o vice-presidente seja democrata?

Exercício 10. (Apostol seção 13.11 exercício 5) De quantas maneiras um baralho de 52 cartas pode ser dividido em quatro pessoas (ou seja, cada um com 13 cartas)?

Exercício 11. (Apostol seção 13.11 exercício 7) Uma pessoa está jogando Pôquer com um baralho de 52 cartas. Ela tem 5 cartas em mãos. Quantas mãos distintas de Pôquer ela pode ter
a) Contendo dois pares (por exemplo, dois reis, 2 ases e um 3)
b) um flush (cinco cartas do mesmo naipe)
c) um straight flush (cinco cartas em sequência do mesmo naipe, mas sem incluir a sequência 10JQKA)
d) Um royal flush (uma sequência 10JQKA do mesmo naipe)

Exercício 12. (Apostol seção 13.14 exercício 1, 3 e 7)
a) Se A e B são dois eventos com probabilidades não nulas, mostre que

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) = P(A)\,P(B|A).$$

b) Se A_1, A_2 e A_3 são eventos tais que $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$, mostre que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2).$$

c) Se A_1, A_2, ... A_n são eventos tais que $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$, mostre que

$$P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}).$$

d) Se $P(C) \neq 0$, mostre que $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Exercício 13. (Apostol seção 13.14 exercício 4) Um comitê de 50 senadores entre um total de 100 senadores é escolhido. Do total de 100 senadores, 2 são do Alasca. Qual é a probabilidade de que os dois senadores do Alasca estejam na comissão, dado que ao menos um está incluído?

Exercício 14. (Apostol seção 13.14 exercício 5) Uma urna contém 5 dados dourados e 7 dados azuis. Dois dados são selecionados da urna (tiramos o primeiro e o deixamos fora da urna. Depois tiramos o segundo). Se o primeiro dado que foi retirado é dourado, calcule a probabilidade do segundo dado também ser dourado.

Exercício 15. (Apostol seção 13.14 exercício 11) Sejam A e B eventos independentes. Prove ou mostre que não vale que:
a) A^c e B são independentes.
b) $A \cap B$ e $A \cup B$ são independentes.
c) $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)\,P(B^c)$

Exercício 16. (Apostol seção 13.14 exercício 10) Se dois eventos A e B são independentes com probabilidade não nulas e diferentes de um, mostre que A^c e B^c são independentes.

Exercício 17. (Apostol seção 13.18 exercício 1) Uma moeda é jogada duas vezes. A probabilidade de sair cara no primeiro jogo é p_1 e no segundo é p_2. Considere um experimento estocasticamente independente de jogar a moeda duas vezes. O espaço amostral é

$$S = \{HH, HT, TH, TT\},$$

em que H é cara e T é coroa.
a) Calcule a probabilidade de cada elemento de S.
b) Podemos escolher p_1 e p_2 tais que $P(HH) = \frac{1}{9}$, $P(HT) = P(TH) = \frac{2}{9}$, $P(TT) = \frac{4}{9}$?

c) Podemos escolher p_1 e p_2 tais que $P(HH) = \frac{1}{6}$, $P(HT) = P(TH) = \frac{1}{6}$, $P(TT) = \frac{1}{6}$?
d) Considere os eventos abaixo. Quais são independentes?
H_1 Cara na primeira jogada
H_2 Cara na segunda jogada
T_1 Coroa na primeira jogada
T_2 Coroa na segunda jogada

Exercício 18. (Apostol seção 13.18 exercício 2) Um estudante faz uma prova com 10 questões verdadeiro ou falso, porém não estudou nada e escolhe as respostas aleatoriamente.
a) Qual a probabilidade de que ele acerte ao menos 5 questões?
b) Qual a probabilidade de que ele acerte ao menos 9 questões?
c) Qual é o menor n tal que a probabilidade de acertar ao menos n corretas é menor do que $\frac{1}{2}$?

Exercício 19. (Apostol seção 13.18 exercício 7) Jogamos um dado honesto 4 vezes. Vale a pena apostar dinheiro que saia ao menos um 6? (Mostre que a probabilidade de sair ao menos um 6 em n jogos é $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$)

Exercício 20. (Apostol seção 13.18 exercício 10) Jogue uma moeda 10 vezes e conte o número de caras. Qual a probabilidade de obter ao menos 6 caras?

Exercício 21. (Apostol seção 13.22 exercício 2) Seja $S = \{a_0, a_1, ...\} \cup \{b_0, b_1, ...\}$ o espaço amostral formado por dois conjuntos enumeráveis distintos. Mostre que podemos definir uma função probabilidade no conjunto dos subconjuntos de S pelas expressões:
a) $P(a_n) = P(b_n) = \frac{1}{2^{n+2}}$, $n = 0, 1, 2, ...$
b) $P(a_n) = P(b_n) = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$, $n = 0, 1, 2, ...$