LISTA DE EXERCÍCIOS 6 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados do Apostol.

Exercício 1. (Apostol, capítulo 8.3, exercícios 6) Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ descrito abaixo. Use um argumento geométrico para determinar se eles são abertos e/ou fechados ou não são nem abertos nem fechados.
a) $x^2 + y^2 \geq 0$.
b) $x^2 + y^2 < 0$.
c) $x^2 + y^2 \leq 1$.
d) $1 < x^2 + y^2 < 2$.
e) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.
f) $1 < x^2 + y^2 \leq 2$.
g) $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq y \leq 4$.
h) $1 \leq x \leq 2$, $3 \leq y < 4$.
i) $y = x^2$.
j) $y \geq x^2$.
k) $y \geq x^2$ e $|x| < 2$.
l) $y \geq x^2$ e $|x| \leq 2$.

Exercício 2. (Apostol, capítulo 8.5, exercícios 5 e 8)
a) Mostre que a união de conjuntos abertos é aberto e que a intersecção de finitos conjuntos abertos é aberto.
b) Mostre que a intersecção de conjuntos fechados é fechado e a união de finitos conjuntos fechados é fechado.
c) Mostre que $\mathbb{R}^n$ é aberto e fechado.
d) Dê um exemplo de união de (infinitos) conjuntos fechados que não é fechada e intersecção de (infinitos) conjuntos abertos que não é aberto.

Exercício 3. (Apostol, capítulo 8.5, exercício 9)
a) Mostre que se S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, então $\text{int}(S) \cup \partial S \cup \text{int}(S^c)$ e que estes conjuntos possuem interseção vazia entre si. Conclua que ∂S é um conjunto fechado.

Exercício 4. (Apostol, capítulo 8.5, exercício 4 e 7)
a) Mostre que se A é um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $x \in A$, então $A \setminus \{x\}$ é aberto. Mostre que se F é um fechado de $\mathbb{R}^n$ e $x \notin F$, então $F \cup \{x\}$ é fechado.
b) Mostre que se A é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e B é um intervalo fechado contido em A, então $A \setminus B$ é um aberto.
c) Mostre que um intervalo fechado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ é um conjunto fechado.

Exercício 5. (Apostol, capítulo 8.3, exercícios 2 e 4)
a) Mostre que se $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ e se os limites $\lim_{x\to a} f(x, y)$ e $\lim_{y\to b} f(x, y)$ existem, então

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x, y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x, y)\right) = L.$$

b) Seja $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Mostre que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = 0$, mas que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Exercício 6. (Apostol, capítulo 8.3, exercício 3)
Seja $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$. Mostre que $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = 1$ e $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = -1$.

Exercício 7. (Apostol, capítulo 8.3, exercício 9)
Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $f(a) \neq 0$, então existe uma bola $B_r(a)$, $r > 0$, tal que se $x \in B_r(a)$, então $f(x)$ tem o mesmo sinal de $f(a)$.

Exercício 8. (Apostol, capítulo 8.3, exercício 6)
Seja $f : (x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Ache o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo da reta $y = mx$. É possível definir $f(0, 0)$ de tal forma que f seja contínua em $(0, 0)$?

Exercício 9. (Apostol, capítulo 8.9, exercícios 1 a 3) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear.

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para $f(x) = \langle a, x \rangle$.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para $f(x) = \|x\|^4$.

c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ para $f(x) = \langle Tx, x \rangle$.

Exercício 10. (Apostol, capítulo 8.9, exercícios 4 a 9) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ das funções abaixo:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 sen(xy)$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

d) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

e) $f(x) = \langle a, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$ é vetor constante.

f) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$ e a_{ij} são constantes

Exercício 11. (Apostol, capítulo 8.9, exercício 21) Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se para todo x e y em S e $t \in [0,1]$, temos que $tx + (1-t)y \in S$.

a) Mostre que toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo.

b) Seja S um conjunto aberto e convexo de $\mathbb{R}^n$. Mostre que se $f : S \to \mathbb{R}$ é diferenciável e $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0$ para todo x e v em S, então f é uma função constante.

Exercício 12. (Apostol, capítulo 8.9, exercício 22) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um função diferenciável.

a) Mostre que não existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(x) > 0$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

b) Dê um exemplo de uma função f e um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\frac{\partial f}{\partial v}(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 13. (Apostol, capítulo 8.14, exercício 7) Seja $f : S \to \mathbb{R}$ e $g : S \to \mathbb{R}$ diferenciáveis, em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto.

a) Mostre que se $S = \mathbb{R}^n$ e $\nabla f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então f é uma constante.

b) $\nabla (f+g) = \nabla (f) + \nabla (g)$.

c) $\nabla (cf) = c \nabla (f)$, em que $c \in \mathbb{R}$.

d) $\nabla (fg) = g \nabla (f) + f \nabla (g)$.

e) $\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$.

Exercício 14. (Apostol, capítulo 8.14, exercício 8) Seja $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $\overrightarrow{r} = (x,y,z)$.

a) Mostre que ∇r é um vetor na direção de $\overrightarrow{r}$.

b) Mostre que $\nabla (r^n) = n r^{n-2} \overrightarrow{r}$, para n positivo.

c) A fórmula do item b) vale quando n é negativo ou zero.

d) Ache uma função tal que $\nabla f = \overrightarrow{r}$.

Exercício 15. (Apostol, capítulo 8.14, exercício 9) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(x) = 0$, para n vetores L.I. v_1, ..., v_n e para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é uma função constante.

Exercício 16. (Apostol, capítulo 8.14, exercício 10) Seja $f : B_r(a) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável na bola de raio r e centro a. Mostre que se $\nabla f(x) > 0$ para todo $x \neq a$, então $\nabla f(a) = 0$.

Exercício 17. (Apostol, capítulo 8.17, exercício 1) Seja $u(t) = f(x(t), y(t))$, em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

a) Mostre que $\frac{du}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$.

b) Calcule $\frac{d^2 u}{dt^2}(t)$.

Exercício 18. (Apostol, capítulo 8.17, exercício 3) a) Ache um vetor $V(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ normal a superfície num ponto diferente de $(0,0,0)$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} + \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

b) Ache o cosseno do ângulo entre o eixo z e o vetor $V(x,y,z)$ e calcule o limite quando $(x,y,z) \to (0,0,0)$.

Exercício 19. (Apostol, capítulo 8.22, exercícios 3, 8 e 10)

a) Seja $u = f(x,y)$, $x = X(s,t)$ e $y = Y(s,t)$. Logo, se $F(s,t) = f(X(s,t), Y(s,t))$, então calcule $\frac{\partial F}{\partial t}$ e $\frac{\partial F}{\partial s}$ em função de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial X}{\partial s}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$ e $\frac{\partial Y}{\partial s}$. Mostre que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2.$$

b) Seja $u = f(x,y,z)$, $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$ e $z = Z(s,t)$. Logo, se $F(s,t) = f(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t))$, então calcule $\frac{\partial F}{\partial t}$ e $\frac{\partial F}{\partial s}$ em função de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial X}{\partial s}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$, $\frac{\partial Y}{\partial s}$, $\frac{\partial Z}{\partial t}$ e $\frac{\partial Z}{\partial s}$.

c) Seja $u = f(x,y)$, $x = X(r,s,t)$ e $y = Y(r,s,t)$. Logo, se $F(r,s,t) = f(X(r,s,t), Y(r,s,t))$, então calcule $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial F}{\partial s}$ e $\frac{\partial F}{\partial r}$ em função de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial X}{\partial r}$, $\frac{\partial X}{\partial t}$, $\frac{\partial X}{\partial s}$, $\frac{\partial Y}{\partial r}$, $\frac{\partial Y}{\partial t}$ e $\frac{\partial Y}{\partial s}$.

Exercício 20. (Apostol, capítulo 8.22, exercício 14) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dados por

$$f(x,y) = \left(e^{x+2y}, sen(y+2x)\right)$$

$$g(u,v,w) = \left(u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2\right)$$

a) Calcule o jacobiano $Jf(x,y)$ e $Jg(u,v,w)$.
b) Calcule a composição $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.
c) Calcule $Jh(1,-1,1)$.

Exercício 21. (Apostol, capítulo 8.22, exercício 15) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidos como

$$f(x,y,z) = \left(x^2 + y + z, 2x + y + z^2\right)$$

$$g(u,v,w) = \left(uv^2w^2, w^2 sen(v), u^2 e^v\right).$$

a) Calcule o jacobiano $Jf(x,y,z)$ e $Jg(u,v,w)$.
b) Calcule a composição $h(u,v,w) = f(g(u,v,w))$.
c) Calcule $Jh(u,0,w)$.