LISTA DE EXERCÍCIOS 6 - MATEMÁTICA 4 (CCM0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Apostol.

Exercício 1. (Apostol seção 14.4 exercício 3) Dois dados são jogados. A cada jogo podemos associar um par $S = \{(a,b)\,;\, a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ que corresponde aos resultados do primeiro e segundo jogo. Seja $X : S \to \mathbb{R}$ a variável aleatória dada por $X(a,b) = a+b$.

a) Descreva os conjuntos $\{X = 7\}$, $\{X = 11\}$, $\{X = 7 \text{ ou } X = 11\}$.

b) Calcule as probabilidades dos eventos dos itens a).

Exercício 2. (Apostol seção 14.8 exercícios 1 e 2)

a) Jogamos um dado. Seja $X : S \to \{1,2,3,4,5,6\}$ a variável aleatória que associa a cada jogada o número que aparece na face superior do dado. Desenhe o gráfico da função de distribuição da variável aleatória F_X.

b) Jogamos dois dados. Seja $X : S \to \{1,2,\ldots,11,12\}$ a variável aleatória que associa a cada jogada a soma dos números que aparecem nas faces superiores dos dados. Ache os valores da função de probabilidade de massa p_X e desenhe o gráfico da função de distribuição da variável aleatória F_X.

Exercício 3. (Apostol seção 14.8 exercícios 8 e 9) Seja $X : S \to \mathbb{R}$ uma variável aleatória.

a) Se a imagem de X é $\{1,2,\ldots,n\}$ e a probabilidade $P(X=k)$ é proporcional a k, calcule a constante de proporcionalidade, a função de probabilidade de massa p_X e a função de distribuição F_X.

b) Se a imagem de X é $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\ldots\}$ e a probabilidade $P(X=k)$ é proporcional a $\frac{c^k}{k!}$, em que $c \in \mathbb{R}$, calcule a constante de proporcionalidade, a função de probabilidade de massa p_X e a função de distribuição F_X.

Exercício 4. (Apostol seção 14.8 exercício 11) O número de minutos que uma pessoa tem que esperar numa estação de trem é dado por uma variável aleatória cuja função de massa de probabilidade é dada por

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{12},\ t = 0,\ 0,3,\ 0,6,\ 0,9,\ 2,1,\ 2,4,\ 2,7,\ 3,0. \\ \frac{1}{9},\ t = 1,2,\ 1,5,\ 1,8 \\ 0, \text{ de outra forma} \end{cases}.$$

Esboce o gráfico da função de distribuição F. Seja A o evento que corresponde a pessoa a esperar um tempo ≥ 1 e ≤ 2. Seja B o evento que corresponde a pessoa a esperar um tempo ≥ 1 e ≤ 3. Calcule as seguintes probabilidades: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B|A)$, $P(A \cup B)$.

Exercício 5. (Apostol seção 14.12 exercício 1) Uma variável aleatória tem uma função de distribuição contínua F, em que

$$F(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } t < 0 \\ ct, \text{ se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1, \text{ se } t > 1 \end{cases}.$$

a) Determine a constante $c > 0$ e descreva a função de densidade f.

b) Calcule a probabilidade $P\left(X = \frac{1}{3}\right)$, $P\left(X < \frac{1}{3}\right)$ e $P\left(|X| < \frac{1}{3}\right)$.

Exercício 6. (Apostol seção 14.12 exercício 4) O tempo que uma pessoa deve esperar o ônibus é dado por uma varável aleatória contínua cuja função de densidade f é dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, \text{ se } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{4}, \text{ se } 2 < t < 4 \\ 0, \text{ de outra formas} \end{cases}.$$

Calcule a probabilidade de uma pessoa ter que esperar:

a) Mais do que 1 minuto.

b) Mais do que 2 minutos.

c) Mais do que 3 minutos.

Exercício 7. (Apostol seção 14.12 exercício 6) Uma variável aleatória tem distribuição uniforme sobre $[-3,3]$.

a) Calcule $P(X=2)$, $P(X<2)$, $P(|X|<2)$, $P(|X-2|<2)$.

b) Ache t para o qual $P(X>t)=\frac{1}{3}$.

Exercício 8. (Apostol seção 14.16 exercício 2) Um material radioativo obedece uma lei de decaimento exponencial com tempo de meia vida de 2 anos. Considere o tempo de decaimento X (em anos) de um átomo e assuma que X tenha distribuição exponencial. Calcule a probabilidade de que o átomo se desintegre:

a) Num intervalo entre $1 \le X \le 2$.

b) Num intervalo entre $2 \le X \le 3$.

c) Num intervalo entre $2 \le X \le 3$, dado que não se desintegrou em $0 \le X \le 2$.

d) Num intervalo entre $2 \le X \le 3$, dado que não se desintegrou em $1 \le X \le 2$

Exercício 9. (Apostol seção 14.16 exercício 8) Uma variável aleatória tem um distribuição normal padrão Φ. Prove que

a) $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

b) $P(|X|<k)=2\Phi(k)-1$.

c) $P(|X|>k)=2(1-\Phi(k))$.

Exercício 10. (Apostol seção 14.16 exercício 14) Se X tem uma distribuição normal padrão, mostre que $Y=aX+b$, $a\neq 0$, também tem uma distribuição normal. Ache a média e variância de Y.

Exercício 11. (Apostol seção 14.16 exercício 15) Se X tem uma distribuição normal padrão e $Y=X^2$.

a) Mostre que $F_Y(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}}du$, se $t\ge 0$.

b) Determine $F_Y(t)$ para $t<0$ e descreva a função de densidade f_Y.

Exercício 12. (Apostol seção 14.18 exercício 1) Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme em $[0,1]$. Determine a função de distribuição F_Y e de densidade f_Y de uma variável aleatória Y se:

a) $Y=3X+1$

b) $Y=1-3X$

c) $Y=X^2$

d) $Y=|\ln(X)|$

e) $Y=\ln(X^2)$

f) $Y=e^X$

Exercício 13. (Apostol seção 14.18 exercício 3) Seja X uma variável aleatória com distribuição normal. Descreva a função de densidade de probabilidade da variável aleatória Y, em que

a) $Y=X^2$

b) $Y=|X|^{\frac{1}{2}}$

c) $Y=e^X$

d) $Y=\arctan(X)$

Exercício 14. (Apostol seção 14.22 exercícios 1 e 2) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias de uma dimensão com funções de distribuição F_X, F_Y e função de distribuição conjunta F.

a) Prove que X e Y são independentes se, e somente se,

$$P(a<X\le b, c<Y\le d)=P(a<X\le b)\,P(c<Y\le d),$$

para todo $a<b$ e $c<d$.

b) Considere o caso discreto. Assuma que $x_1,x_2,\ldots$ e $y_1,y_2,\ldots$ são pontos de massa de X e Y, respectivamente. Seja $a_i=P(X=x_i)$, $b_j=P(Y=y_j)$ e $p_{ij}=P(Y=x_i,Y=y_j)$. Mostre que X e Y são independentes se, e somente se, $p_{ij}=a_ib_j$ para todo i,j.

c) Assuma que X e Y sejam contínuas e possuem funções de densidades f_X e f_Y continuas. Suponha que F também tenha uma função de densidade contínua f. Mostre que X e Y são independentes se, e somente se, $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. (Dica: Expresse a função de densidade como derivada da função de distribuição).

No caso em que X e Y assumem valores x_1, x_2, y_1 e y_2, respectivamente, suponha que $P(X=x_1,Y=y_1)=P(X=x_2,Y=y_2)=\frac{p}{2}$ e $P(X=x_1,Y=y_2)=P(X=x_2,Y=y_1)=\frac{1}{2}$, em que $p+q=1$, p e q são ≥ 0.

d) Determine $P(X=x_i)$, $P(Y=y_j)$ para todo i e j entre 1 e 2.

e) Para quais valores p as variáveis X e Y são independentes.

Exercício 15. (Apostol seção 14.22 exercício 3) Seja $a<b$ e $c<d$. Defina uma função f da seguinte forma

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)(d-c)},\ (x,y)\in[a,b]\times[c,d]\\ 0,\ \text{de outra forma}\end{cases}.$$

a) Verifique que f é a densidade de uma distribuição contínua e determine F.
b) Determine as distribuições de dimensão um F_X e F_Y obtidas de f.
c) Determine se X e Y são variáveis aleatórias independentes.

Exercício 16. (Apostol seção 14.24 exercícios 1 e 2) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes e de dimensão um, cada uma com distribuição uniforme sobre $[0, 1]$.

Sejam $U = X + Y$ e $V = X - Y$.
a) Prove que U tem uma distribuição de densidade contínua f_U dada por

$$f_U(u) = \begin{cases} u, \; 0 < u \leq 1 \\ 2-u, \; 1 < u < 2 \\ 0, \text{ de outra forma} \end{cases}.$$

b) Descreva de numa forma similar a densidade contínua f_V de V.
c) Determine se U e V são independentes ou não.
Sejam agora $U = \max\{X, Y\}$ e $V = \min\{X, Y\}$.
d) Prove que U tem uma distribuição de densidade f_U dada por

$$f_U(u) = \begin{cases} 2u, \; 0 < u \leq 1 \\ 0, \text{ de outra forma} \end{cases}.$$

e) Descreve a função de densidade f_V para V
f) Determine se U e V são independentes ou não.

Exercício 17. (Apostol seção 14.27 exercício 1) Jogamos um dado. Seja X a variável aleatória com valores em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que corresponde ao número que aparece em cima do dado. Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Exercício 18. (Apostol seção 14.27 exercícios 3) Mostre as seguintes propriedades para distribuições contínuas ou discretas:
a) $E(cX) = cE(X)$
b) $Var(cX) = c^2 Var(X)$
c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
d) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
e) $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2E((X - E(X))(X - E(X)))$
f) $E(\varphi_1(X) + \varphi_2(Y)) = E(\varphi_1(X)) + E(\varphi_2(Y))$

Exercício 19. (Apostol seção 14.27 exercícios 7) Calcule a esperança e a variância (se elas existirem) de uma variável aleatória X que possui
a) Uma distribuição de Poisson com parâmetro λ.
b) Uma distribuição de Cauchy.
c) Uma distribuição exponencial com parâmetro λ.
d) Uma distribuição normal.

Exercício 20. (Apostol seção 14.31 exercício 1) Demonstre a desigualdade de Chebyshev supondo que X tem uma distribuição discreta.