LISTA DE EXERCÍCIOS 7 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados do Apostol.

Exercício 1. (Apostol, capítulo 9.3, exercícios 1 e 2) Ache as soluções dos problemas abaixo:
a) $4\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $f(x,0) = sen(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
b) $5\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $f(0,0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. (Apostol, capítulo 9.3, exercícios 3 e 4)
a) Se $u(x,y) = f(xy)$, com f de classe C^1, então mostre que u resolve a equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ache uma solução quando $u(x,x) = x^4 e^{x^2}$, para todo x.
b) Se $v(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$, com f de classe C^1, então mostre que u resolve a equação

$$x\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ache uma solução quando $v(1,1) = 2$ e $\frac{\partial v}{\partial x}\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$.

Exercício 3. (Apostol, capítulo 9.3, exercício 8 e 9)
Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.
a) Mostre que se $f(tx) = t^p f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $t > 0$, então

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = pf(x).$$

b) Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ temos $\langle \nabla f(x), x \rangle = pf(x)$. Mostre que $f(tx) = t^p f(x)$. Dica: defina $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$ e derive em relação ao tempo.

Exercício 4. (Apostol, capítulo 9.5, exercício 4) Usando coordenadas polares $x = rcos(\theta)$ e $y = rsen(\theta)$, mostre que se $f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = g(r,\theta)$, então
a) $\|\nabla f(rcos(\theta), rsen(\theta))\| = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$.
b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$.

Exercício 5. (Apostol, capítulo 9.5, exercício 3)
Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ao ser escrito usando coordenadas polares se torna uma função que apenas depende de r: $g(r)$. Mostre que neste caso

$$\Delta f = \frac{1}{r}g'(r) + g''(r).$$

Conclua que $f(x,y) = a\log(x^2 + y^2) + b$ é uma solução da equação de Laplace.

Exercício 6. (Apostol, capítulo 9.8, exercício 3) As equações $F(x,y,u,v) = 0$ e $G(x,y,u,v)$ determinam x e y como função de u e v: $x = X(u,v)$ e $y = Y(u,v)$. Mostre que

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,u)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}.$$

Ache expressões análogas para $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$ e $\frac{\partial Y}{\partial v}$.

Exercício 7. (Apostol, capítulo 9.8, exercício 7) A equação $f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ determina z como função de x e y, isto é, $z = g(x,y)$. Mostre que

$$g(x,y) = x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Exercício 8. (Apostol, capítulo 9.8, exercício 9) A equação $x + z + (y + z)^2 = 6$ define z como função de x e y. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ como função de x, y e z.

Exercício 9. (Apostol, capítulo 9.8, exercício 12) Seja $F(x, y) = f(x + g(y))$. Mostre que

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Exercício 10. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 18) Determine os valores críticos, mínimos máximos... da função $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Exercício 11. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 19) Determine constantes a e b tais que a integral abaixo seja tão pequena quanto possível nos casos:

$$\int_0^1 (ax + b - f(x))^2\, dx$$

a) $f(x) = x^2$.
b) $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1}$.

Exercício 12. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 21) (Método dos mínimos quadrados. De novo...) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$. Dados pontos (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) em $\mathbb{R}^2$, determine os valores de a e b tais que

$$E(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

seja o menor possível.

Exercício 13. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 22) Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax+by+c$. Dados pontos (x_1, y_1, z_1), ..., (x_n, y_n, z_n) em $\mathbb{R}^3$, determine os valores de a, b e c tais que

$$E(a, b, c) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k, y_k) - z_k)^2$$

seja o menor possível.

Exercício 14. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 23) Sejam z_1, ..., z_n são n pontos distintos de $\mathbb{R}^m$. Se $x \in \mathbb{R}^m$, definimos

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \|x - z_k\|^2.$$

Prove que f tem um mínimo em $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$.

Exercício 15. (Apostol, capítulo 9.13, exercício 25) Verifique que a função $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ tem um ponto crítico em $(1, 1, 1)$. Calcule os autovalores da Hessiana de f e determine se esse ponto crítico é um máximo, mínimo ou nenhum dos dois.

Exercício 16. (Apostol, capítulo 9.15, exercício 1,3,4)
a) Ache os valores extremos de $z = xy$ com a condição $x + y = 1$
b) Ache os valores extremos de $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ com a condição $x^2 + y^2 = 1$
c) Ache os valores extremos de $z = x^2 + y^2$ com a condição $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$
d) Ache os valores extremos de $z = cos^2(x) + sen^2(y)$ com a condição $x - y = \frac{\pi}{4}$

Exercício 17. (Apostol, capítulo 9.15, exercício 2,6) Ache a distância máxima e mínima de um ponto a origem quando:
a) Ele pertence a curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ em $\mathbb{R}^2$.
b) Ele pertence a superfície $z^2 - xy = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 18. (Apostol, capítulo 9.15, exercício 5,9) Ache os valores extremos de
a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ na esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
b) $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ no plano $x + y + z = 1$

Exercício 19. (Apostol, capítulo 9.15, exercícios 7) Ache a menor distância entre $(1, 0)$ e a parábola $y^2 = 4x$.

Exercício 20. (Apostol, capítulo 9.15, exercício 8) Ache os pontos de $\mathbb{R}^3$ mais próximo a origem que pertençam a intersecção entre as superfícies $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 1$.