LISTA DE EXERCÍCIOS EDP 2

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDP

Abaixo, selecionamos alguns exercícios interessantes.

Método das Características

Exercício 1. (Vasy cap. 3.1)
i) Resolva $\operatorname{sen}(y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=x$, $u(x,0)=0$.
ii) Esboce as curvas características.

Exercício 2. (Vasy cap. 3.2)
i) Resolva $x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u^2$, $u(x,0)=\cos(x)$ para $|x|$ pequeno.

Exercício 3. (Vasy cap. 3.3)
i) Resolva $x\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $u(x,0)=e^{-x^2}$.
ii) Em que região u está unicamente determinada?

Exercício 4. (Vasy cap. 3.4)
i) Resolva $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=u^2$, $u(x,0)=e^{-x^2}$.
ii) Mostre que existe $T>0$ onde existe um "blow up", isto é, u é de classe C^1 para t$\in[0,T[$, mas, para algum x_0, $|u(x_0,t)|\to\infty$, quando $t\to T^-$. Quem é T?

Exercício 5. (Vasy cap. 4.1)
Resolva $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $u(x,0)=-x^2$ para $|t|$ pequeno.

Exercício 6. (Vasy cap. 4.2)
Resolva $e^t\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}=0$, $u(x,0)=x$ para $|t|$ pequeno.

Exercício 7. (Vasy cap. 4.3)
Considere a EDP

$$\begin{array}{c}(1+u)\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2\\ u(0,y)=y\end{array}.$$

Resolva a EDP numa vizinhança de $(0,0)$. É possível resolver a EDP numa vizinhança de todo eixo y? O que acontece próximo a $x=0$ e $y=-1$? Justifique sua resposta.

Exercício 8. (Folland cap. 1.B.1)
Resolva $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=u$ com $u(x,0)=\cos(x)$. (Resposta: $u(x,y)=e^y\cos(x-y)$).

Exercício 9. (Folland cap. 1.B.2)
Resolva $x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}=u^2$ com $u(x,2x)=1$. (Resposta: $u(x,y)=\frac{xy}{(xy-y+2x)}$).

Exercício 10. (Folland cap. 1.B.3) Mostre por considerações geométricas que uma solução geral da equação

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$$

é dada por $u(x,y)=f(xy)$. Ache a solução cujo gráfico contém a linha $u=x=y$. (Resposta: $u(x,y)=\sqrt{xy}$). O que ocorre com o problema de valor inicial quando ele é dado na superfície $y=\frac{1}{x}$?

Exercício 11. (Folland cap. 1.B.4) Resolva a equação $u(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=0$ com $u(x,x)=0$. (Resposta: $u(x,y)=(1+2x-2y)^{\frac{1}{2}}$). Algo estranho ocorre quando consideramos condições iniciais $u(x,x)=1$ ao invés de 0. O que é que ocorre?

Exercício 12. (Evans cap. 3.3) Resolva usando o método das características:

a) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 2u$, $u(x_1, 1) = g(x_1)$.

b) $u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 1$, $u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1$.

c) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 3u$, $u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2)$.

Exercício 13. Seja $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H = H(x_1, ..., x_n, t, p_1, ..., p_n)$, uma função de classe C^1. A equação de Hamilton-Jacobi associada a H é dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x_1, ..., x_n, t, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Mostre que as equações características têm a forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H, \text{ e } \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Teorema de Cauchy-Kowalevski

Exercício 14. (Folland cap. 1.D.2)

Transforme a equação $\Delta u = f$ definida em $\mathbb{R}^n$ num sistema de primeira ordem usando a construção feita em sala de aula. Use como hiperplano o conjunto $x_n = 0$.

Exercício 15. (Folland cap. 1.D.3)

Para entender como as ideias do Teorema de Cauchy-Kowalevski funcionam num contexto mais simples, prove o seguinte teorema sobre equações diferenciais ordinárias definidas em $\mathbb{C}$.

Suponha que $p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m z^m$ e $q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m z^m$ são holomorfas no disco $|z| < R$ (portanto, as séries convergem absolutamente e uniformemente em todo disco de raio menor do que R). Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$u''(z) = p(z) u'(z) + q(z) u(z), \quad u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1.$$

a) Mostre que se $u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ satisfaz a equação acima, então

$$c_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} \sum_{j=0}^{m} \left[(j+1) c_{j+1} p_{m-j} + c_j q_{m-j}\right].$$

Assim, os coeficientes são unicamente determinados.

b) Suponha que $P_m \geq |p_m|$ e $Q_m \geq |q_m|$ para todo $m \geq 0$, e seja $P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m z^m$ e $Q(z) = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m z^m$. Mostre que se $U(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^m$ satisfaz

$$U''(z) = P(z) U'(z) + Q(z) U(z), \quad U(0) = C_0, \quad U'(0) = C_1,$$

com $C_0 \geq |c_0|$ e $C_1 \geq |c_1|$, então $C_m \geq |c_m|$.

c) Suponha que $r < R$. Mostre que as condições do item b) são satisfeitas se tomarmos $P_m = K r^{-m}$ e $Q_m = K(m+1) r^{-m}$ para K suficientemente grande, de tal forma que $P(z) = K\left(1 - \frac{z}{r}\right)^{-1}$ e $Q(z) = K\left(1 - \frac{z}{r}\right)^{-2}$. Mostre também que a solução geral de $U''(z) = P(z) U'(z) + Q(z) U(z)$ é uma combinação linear de $\left(1 - \frac{z}{r}\right)^{\alpha}$ e $\left(1 - \frac{z}{r}\right)^{\beta}$ para coeficientes α e β adequados.

d) Conclua que existe uma única função u holomorfa no disco $|z| < R$ que é solução de

$$u''(z) = p(z) u'(z) + q(z) u(z), \quad u(0) = c_0, \quad u'(0) = c_1.$$

Exercício 16. (Qing Han cap. 7.3) Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) = 0 \text{ em } \mathbb{R} \times]0, \infty[\\ u(x, 0) = x, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -x \end{gathered}$$

Ache uma solução como série de potências em torno do $(0,0)$ e identifique essa solução.

Exercício 17. (Evans cap. 4.2) Considere a seguinte equação de Laplace $\Delta u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ com as condições iniciais:

$$u(x_1, 0) = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n x_1).$$

Procure uma solução da forma $u(x_1, x_2) = f(x_1) g(x_2)$ e conclua que $u(x_1, x_2) = \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(n x_1) \operatorname{senh}(n x_2)$. O que ocorre com u quando $n \to \infty$? Compare o comportamento da solução com o das condições iniciais quando $n \to \infty$. (Isto nos diz de certa forma que a solução deste problema não é contínua em relação aos dados iniciais. O exemplo é de Hadamard).

Exercício 18. (Evans cap. 4.9) Mostre que a linha $t=0$ é característica (ou seja, não é não-característica) para a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Mostre que não existe uma solução analítica da equação do calor em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ com $u(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$. (Dica: Assuma que exista uma solução, calcule seus coeficientes e conclua que a série diverge. O exemplo é de Kowalevski).

Exercício 19. (Qing han cap. 7.6) Sejam a,b_{ij} funções analíticas definidas em uma vizinhança de $0\in\mathbb{R}^2$ e φ, ψ analíticas em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}$. Em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$, considere

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b_{11}u+b_{12}v=f \\ \frac{\partial v}{\partial x}+b_{12}u+b_{22}v=g \end{cases}$$

com a condição $u(x,0)=\varphi(x)$ e $v(0,t)=\psi(t)$

Seja (u,v) uma solução suave em uma vizinhança da origem. Prove que todas as derivadas de u e v são expressas em termos daquelas de a, b_{ij}, f, g, φ e ψ em 0.

Distribuições e Transformada de Fourier

Exercício 20. (Vasy cap. 5.5) Mostre que a única solução de $u'=0$ é uma constante, quando $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

($u'=0$ significa que $u(\phi')=0$ para todo $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Estamos pedindo para mostrar que nesse caso existe uma constante $c\in\mathbb{C}$ tal que $u(\phi)=T_c(\phi)=c\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\,dx$, para todo $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Para tanto, mostre que $\phi=\psi'$, com $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ se, e somente se, $\int\phi dx=0$. Considere $\phi_0\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int\phi_0 dx=1$. Escreva $\phi(x)=\left(\phi(x)-\phi_0(x)\int\phi dx\right)+\phi_0(x)\int\phi dx$ e tente concluir o resultado dessa expressão.)

Exercício 21. (Vasy cap. 5.6) Considere a EDP $a\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$.

a) Mostre que se $f\in C(\mathbb{R})$, então $u(x,y)=f(x-ay)$ é uma solução no sentido de distribuições da EDP considerada.

b) Como podemos definir $u(x,y)=\delta(x-ay)$? (Dica: Use o cálculo formal $\int\delta(x-ay)\phi(x,y)\,dxdy=\int\delta(\tilde{x})\phi(\tilde{x}+a\tilde{y},\tilde{y})\,d\tilde{x}d\tilde{y}=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\delta(x)\phi(x+ay,y)\,dx\right)dy$. Agora fica simples adivinhar!).

c) Mostre que $u(x,y)=\delta(x-ay)$ é uma solução no sentido de distribuições.

Exercício 22. (Vasy cap. 5.9) Seja $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 1+x, & -1<x<0 \\ 1-x, & 0<x<1 \\ 0, & x>1 \end{cases}.$$

Assim, $\psi\geq 0$, $\int\psi dx=1$ e $\psi(x)=0$ se $|x|\geq 1$. Considere $\psi_j(x)=j\psi(jx)$, para $j\in\mathbb{N}$.

a) Mostre que $\lim_{j\to\infty}\psi_j=\delta$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

b) Seja $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi(x)=1$ se $|x|\leq 1$. Mostre que $\int\psi_j^2\phi dx$ não converge. Conclua que ψ_j^2 não converge para nenhuma distribuição.

c) Conclua que não existe uma extensão contínua da função $Q:C(\mathbb{R})\to C(\mathbb{R})$ dada por $Q(f)=f^2$ para $Q:\mathcal{D}'(\mathbb{R})\to\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, no sentido que leva sequências de distribuições convergentes em distribuições convergentes. Assim, não podemos multiplicar distribuições em geral.

Exercício 23. (Vasy cap. 8.1) Seja $f\in C(\mathbb{R}^n)$ uma função tal que $|x|^N f(x)$ é limitada para algum $N>n$. Definimos

$$\mathcal{F}f(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}f(x)\,dx \;\text{ e }\; \mathcal{F}^{-1}f(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi}f(x)\,dx.$$

a) Seja $a\in\mathbb{R}^n$ e f_a a função $f_a(x)=f(x-a)$. Mostre que $\mathcal{F}f_a(\xi)=e^{-ia.\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)$.

b) Seja $a\in\mathbb{R}^n$ e g_a a função $g_a(x)=e^{ix.a}f(x)$. Mostre que $\mathcal{F}g_a(\xi)=(\mathcal{F}f)(\xi-a)$.

c) Mostre que $\mathcal{F}^{-1}f_a(x)=e^{ia.x}\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)(x)$.

d) Mostre que $\mathcal{F}^{-1}g_a(x)=\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)(x+a)$.

Exercício 24. (Vasy cap. 8.2)

Seja $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|x|^N f(x)$ e $|x|^N\partial_{x_j}f(x)$ são limitadas para algum $N>n$. Use que $\mathcal{F}f_a(\xi)=e^{-ia.\xi}(\mathcal{F}f)(\xi)$, para $f_a(x)=f(x-a)$, e conclua que $(\mathcal{F}(\partial_j f))(\xi)=i\xi_j(\mathcal{F}f)(\xi)$.

Exercício 25. (Vasy cap. 8.3) Calcule as seguinte transformadas de Fourier para funções definidas em $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = H(a - |x|)$, em que $H(x)$ é igual a 1 para $x \geq 0$, igual a 0 para $x < 0$ e $a > 0$.

b) $f(x) = H(x)\, e^{-ax}$, para $a > 0$.

c) $f(x) = |x|^n e^{-a|x|}$, para $a > 0$ e $n \geq 0$ um inteiro.

d) $f(x) = \left(1 + x^2\right)^{-1}$. (Dica: Use transformada de Fourier inversa).

Exercício 26. Seja $\delta_c \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definida por $\delta_c(\phi) = \phi(c)$. Mostre que

a) Em $\mathbb{R}^n$, temos $\mathcal{F}\left(e^{ix.a}\right) = (2\pi)^n \delta_a$.

b) Em $\mathbb{R}$, temos $\mathcal{F}_\xi^{-1}(\cos(\xi t)) = \frac{1}{2}(\delta_{-t} + \delta_t)$ para todo $t > 0$.

Exercício 27. (Vasy Cap. 9.1)

i) Mostre que para $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ contínua com $(1 + |x|)^N \phi(x)$ limitada para algum $N > n$, temos

$$\overline{\mathcal{F}\phi(\xi)} = (2\pi)^n \left(\mathcal{F}^{-1}\overline{\phi}\right)(\xi),$$

em que $\overline{z}$ denota a conjugação complexa.

ii) Mostre a fórmula de Parseval/Plancherel: Para ϕ e $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int \phi(x)\, \overline{\psi(x)} dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}\phi)(\xi)\, \overline{(\mathcal{F}\psi)(\xi)} d\xi,$$

e, portanto, conclua que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{F}\phi)(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)|^2 dx.$$

Dica: Use a parte (i) para escrever $\overline{\mathcal{F}\psi(\xi)} = \mathcal{F}^{-1}\chi(\xi)$ para alguma $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.