LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro.

Exercício 1. (F. 3.1, ex.2) Suponha que $\{y_1, ..., y_n\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ (não necessariamente ortonormal). Seja $y \in \mathbb{C}^n$ e a_1, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n.$$

i) Calcule $\langle y, y_j \rangle$ e mostre que $\langle y, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

ii) Conclua que

$$y = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Exercício 2. (F. 3.1, ex.4) Sejam $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2i, -2i, 0)$, $u_2 = \frac{1}{5}(2 - 4i, -2, i, 0)$, $u_3 = \frac{1}{15}(4 + 2i, 5 + 8i, 4 + 10i, 0)$ e $u_4 = (0, 0, 0, i)$.

i) Mostre que $\{u_1, ..., u_4\}$ é um conjunto ortonormal de $\mathbb{C}^4$, ou seja, mostre que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases}.$$

(Lembremos que o produto interno é dado por $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_4 \overline{y_4}$.

ii) Expresse os vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 10 - i, 10 - 9i, -3)$ como combinação linear dos vetores $\{u_1, ..., u_4\}$. Use que

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 + \langle u, u_4 \rangle u_4.$$

Exercício 3. (F. 3.2, ex.1) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases}.$$

Exercício 4. (F. 3.2, ex.2) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \ n = m \\ 0, \ n \neq m \end{cases}.$$

Exercício 5. (F. 3.3, ex.4) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal de $L^2(a, b)$. Sejam $c > 0$ e $d \in \mathbb{R}$ duas constantes e definamos $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ como o conjunto das funções $\psi_n(x) = c^{\frac{1}{2}} \phi_n(cx + d)$. Mostre que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2\left(\frac{a-d}{c}, \frac{b-d}{c}\right)$. (Dica: Use mudança de coordenadas $y = cx + d$ para provar que o conjunto $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é ortonormal e satisfaz as propriedades de base)

Exercício 6. (F. 3.3, ex.6) Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ o conjunto das funções dadas por $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$. No exercício 3, vimos que este conjunto é ortonormal. Mostre agora que ele é uma base de $L^2(0, l)$. Para tanto, siga o seguinte argumento:

i) Já vimos em sala de aula que $\psi_n(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(nx)$, $n \geq 1$ é uma base ortonormal de $L^2(0, \pi)$. Usando o exercício 5, conclua que a sequência de funções $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\psi_n(x) = \left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)$, $n \geq 1$ é uma base de $L^2(0, 2l)$.

ii) Seja $f \in L^2(0, l)$. Vamos definir $\tilde{f} : [0, 2l] \to \mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), \ x \in [0, l] \\ f(2l - x), \ x \in [l, 2l] \end{cases}.$$

Mostre que $\left\langle \tilde{f}, \psi_{2n-1} \right\rangle = \sqrt{2} \langle f, \phi_n \rangle$ e $\left\langle \tilde{f}, \psi_{2n} \right\rangle = 0$.

iii) Conclua que se $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ para todo n, então $f = 0$. Logo $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base.

Exercício 7. (F. 3.3, ex.7) Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ o conjunto das funções dadas por $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$. No exercício 4, vimos que este conjunto é ortonormal. Mostre agora que ele é uma base de $L^2(0, l)$. Para tanto, siga o seguinte argumento do exercício anterior usando a função $\tilde{f} : [0, 2l] \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x),\ x \in [0, l] \\ -f(2l - x),\ x \in [l, 2l] \end{cases}.$$

Exercício 8. (F. 3.3, ex.8) Ache a expansão das funções $f(x) = 1$ e $g(x) = x$ em $[0, l]$ usando as bases dos exercícios 6 e 7. Use que

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Exercício 9. (F. 3.3, ex.9) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal de $L^2(a, b)$. Mostre que para todo f e g pertence a $L^2(a, b)$ temos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle g, \phi_n \rangle}.$$

Dica: Use $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n$ e as propriedades de ortonormalidade.

Exercício 10. (F. 3.5, ex.1) Sobre que condições nas constantes c e c' as condições de contorno $f(b) = cf(a)$ e $f'(b) = c'f'(a)$ são condições de contorno auto-adjuntas (isto é, $r\left(f'\overline{g} - f\overline{g'}\right)\Big|_a^b = 0$) para o operador $L(f) = (rf')' + pf$ em $[a, b]$?

Exercício 11. (F. 3.5, ex.3) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(l) = 0$ em $[0, l]$? Use o exercício 6.

Exercício 12. (F. 3.5, ex.4) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f'(0) = 0$, $f(l) = 0$ em $[0, l]$? Use o exercício 7.

Exercício 13. (F. 3.5, ex.7) Ache os autovalores e as autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(1) = -f(1)$ em $[0, l]$?

Exercício 14. (F. 3.5, ex.12) Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r\frac{df}{dx}\right) + pf + \lambda f = 0, \quad f(a) = f(b) = 0.$$

i) Mostre que se f é uma solução do problema anterior, então

$$\lambda \int_a^b |f|^2\, dx = \int_a^b r\,|f'|^2\, dx - \int_a^b p\,|f|^2\, dx.$$

Dica: Use o fato de que $\lambda f = -(rf') - pf$ e integre por partes.
ii) Deduza que se $p(x) \le C$ para todo x, então os autovalores do problema acima satisfazem $\lambda \ge -C$.

Exercício 15. (F. 4.2, ex.1) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),\ (t, x) \in]0, \infty[\times]0, l[\\ u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0,\ t > \infty \\ u(0, x) = 50,\ \forall x \in]0, l[\end{cases}.$$

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),\ (t, x) \in]0, \infty[\times]0, l[\\ u(t, 0) = C,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = 0,\ t > \infty \\ u(0, x) = 50,\ \forall x \in]0, l[\end{cases}.$$

Exercício 17. (F. 4.2, ex.3) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x),\ (t, x) \in]0, \infty[\times]0, l[\\ u(t, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) = C,\ t > \infty \\ u(0, x) = 50,\ \forall x \in]0, l[\end{cases}.$$

Exercício 18. (F. 4.2, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-2t}\text{sen}\,(x)\,,\ (t,x) \in \,]0,\infty[\,\times\,]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 0,\ \forall x \in \,]0,\pi[\end{cases}.$$

Exercício 19. (F. 4.3, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - a^2 u(t,x),\ (t,x) \in \,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in \,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x \in \,]0,l[\end{cases}.$$

Exercício 20. (F. 4.3, ex.6) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2k\frac{\partial u}{\partial t},\ (t,x) \in \,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in \,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x \in \,]0,l[\end{cases}.$$