LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e Djairo. (F. X, ex.Y) e (D. X, ex.Y) indicam o exercício Y do capítulo X do livro do Folland (F) e Djairo (D).

Exercício 1. (F. 3.1, ex.2) Suponha que $\{y_1, ..., y_n\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ (não necessariamente ortonormal). Seja $y \in \mathbb{C}^n$ e a_1, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n.$$

i) Calcule $\langle y, y_j \rangle$ e mostre que $\langle y, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

ii) Conclua que

$$y = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Exercício 2. (F. 3.1, ex.4) Sejam $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2i, -2i, 0)$, $u_2 = \frac{1}{5}(2-4i, -2, i, 0)$, $u_3 = \frac{1}{15}(4+2i, 5+8i, 4+10i, 0)$ e $u_4 = (0, 0, 0, i)$.

i) Mostre que $\{u_1, ..., u_4\}$ é um conjunto ortonormal de $\mathbb{C}^4$, ou seja, mostre que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{se } n = m \\ 0, \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

(Lembremos que o produto interno é dado por $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_4 \overline{y_4}$.

ii) Expresse os vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 10-i, 10-9i, -3)$ como combinação linear dos vetores $\{u_1, ..., u_4\}$. Use que

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 + \langle u, u_4 \rangle u_4.$$

Exercício 3. (F. 3.2, ex.1) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \text{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{se } n = m \\ 0, \text{se } n \neq m \end{cases}.$$

Exercício 4. (F. 3.2, ex.2) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \, n = m \\ 0, \, n \neq m \end{cases}.$$

Exercício 5. (F. 3.3, ex.9) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal para o intervalo (a, b). Mostre que para todas funções contínuas por partes f e g, temos

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \overline{\langle g, \phi_n \rangle}.$$

Dica: Use $f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n$ e as propriedades de ortonormalidade.

Exercício 6. (F. 3.5, ex.1) Sobre que condições nas constantes c e c' as condições de contorno $f(b) = cf(a)$ e $f'(b) = c'f'(a)$ são condições de contorno auto-adjuntas (isto é, $r\left(f'\overline{g} - f\overline{g'}\right)\big|_a^b = 0$) para o operador $L(f) = (rf')' + pf$ em $[a, b]$?

Exercício 7. (F. 3.5, ex.3) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(l) = 0$ em $[0, l]$? (Dica: Procure soluções da forma $\text{sen}(Ax + B)$)

Exercício 8. (F. 3.5, ex.4) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f'(0) = 0$, $f(l) = 0$ em $[0, l]$? (Dica: Procure soluções da forma $\cos(Ax + B)$)

Exercício 9. (F. 3.5, ex.7) Ache os autovalores e as autofunções normalizadas para o problema $f'' + \lambda f = 0$, $f(0) = 0$, $f'(1) = -f(1)$ em $[0, l]$?

Exercício 10. (F. 3.5, ex.12) Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r\frac{df}{dx}\right)+pf+\lambda f=0,\quad f(a)=f(b)=0.$$

i) Mostre que se f é uma solução do problema anterior, então

$$\lambda\int_a^b |f|^2\,dx=\int_a^b r\,|f'|^2\,dx-\int_a^b p\,|f|^2\,dx.$$

Dica: Use o fato de que $\lambda f=-(rf')-pf$ e integre por partes.

ii) Deduza que se $p(x)\leq C$ para todo x, então os autovalores do problema acima satisfazem $\lambda\geq -C$.

Exercício 11. (D. 4.7, ex.3.1 e 3.2) Consideremos o problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=g_0(t)\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l)=g_1(t)\,,\ t>0\\ u(0,x)=f(x)\,,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Ache uma função $u_0(t,x)$ tal que a solução do problema acima possa ser escrita como $u(t,x)=u_0(t,x)+v(t,x)$, em que v resolve um problema do tipo abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)+F(t,x)\,,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,0)=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}(t,l)=0,\ t>0\\ v(0,x)=g(x)\,,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Exercício 12. (D. 4.7, ex.4.7) Obtenha a solução do problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+e^{-t},\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,l)=0,\ t>0\\ u(0,x)=0,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Exercício 13. (D. 5, ex.2.1) Consideremos o problema abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ u(t,0)=A,\ u(t,l)=B,\ t>0\\ u(0,x)=f(x)\,,\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=g(x)\,,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Ache uma função $u_0(x)$ tal que a solução do problema acima possa ser escrita como $u(t,x)=u_0(x)+v(t,x)$, em que v resolve um problema do tipo abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2 v}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\,,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ v(t,0)=0,\ v(t,l)=0,\ t>0\\ v(0,x)=\tilde{f}(x)\,,\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial v}{\partial t}(0,x)=\tilde{g}(x)\,,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Exercício 14. (D. 5, ex.6.2,6.3) Resolva os problemas abaixo:

i)

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ u(t,0)=0,\ u(t,l)=e^{-t},\ t>0\\ u(0,x)=0,\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

ii)

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)+A,\ t>0\ x\in\,]0,l[\\ u(t,0)=0,\ u(t,l)=e^{-t},\ t>0\\ u(0,x)=0,\ x\in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0,\ x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

Exercício 15. (F. 4.2, ex.1) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,l)=0,\ t>0\\ u(0,x)=50,\ \forall x\in\,]0,l[\end{array}\right..$$

(Dica: Use exercício 7)

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = C,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ t>0 \\ u(0,x) = 50,\ \forall x \in]0,l[\end{array}\right. .$$

Exercício 17. (F. 4.2, ex.3) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = C,\ t>0 \\ u(0,x) = 50,\ \forall x \in]0,l[\end{array}\right. .$$

Exercício 18. (F. 4.2, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-2t}\mathrm{sen}\,(x)\,,\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t>0 \\ u(0,x) = 0,\ \forall x \in]0,\pi[\end{array}\right. .$$

Exercício 19. (F. 4.3, ex.5) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - a^2u(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t>0 \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x \in]0,l[\end{array}\right. .$$

Exercício 20. (F. 4.3, ex.6) Resolva a equação abaixo:

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2k\frac{\partial u}{\partial t},\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t>0 \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x \in]0,l[\end{array}\right. .$$