LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro.

Exercício 1. (F. 3.1, ex.2) Suponha que $\{y_1, ..., y_n\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{C}^n$ (não necessariamente ortonormal). Seja $y \in \mathbb{C}^n$ e a_1, ..., $a_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n.$$

i) Calcule $\langle y, y_j \rangle$ e mostre que $\langle y, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2$, para todo $j \in \{1, ..., n\}$.

ii) Conclua que

$$y = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Resolução:

i) Basta observar que $\langle y_j, y_k \rangle = 0$ se $j \neq k$. Assim,

$$\langle y, y_j \rangle = \langle a_1 y_1 + ... + a_n y_n, y_j \rangle = a_1 \langle y_1, y_j \rangle + ... + a_n \langle y_n, y_j \rangle = a_j \langle y_j, y_j \rangle = a_j \|y_j\|^2 .$$

Logo $a_j = \frac{\langle y, y_j \rangle}{\|y_j\|^2}$

ii) Usando o resultado anterior, concluímos que

$$y = a_1 y_1 + ... + a_n y_n = \frac{\langle y, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2} y_1 + ... + \frac{\langle y, y_n \rangle}{\|y_n\|^2} y_n.$$

Exercício 2. (F. 3.1, ex.4) Sejam $u_1 = \frac{1}{3}(1, 2i, -2i, 0)$, $u_2 = \frac{1}{5}(2 - 4i, -2, i, 0)$, $u_3 = \frac{1}{15}(4 + 2i, 5 + 8i, 4 + 10i, 0)$ e $u_4 = (0, 0, 0, i)$.

i) Mostre que $\{u_1, ..., u_4\}$ é um conjunto ortonormal de $\mathbb{C}^4$, ou seja, mostre que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases} .$$

(Lembremos que o produto interno é dado por $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_4 \overline{y_4}$.

ii) Expresse os vetores $(1, 0, 0, 0)$ e $(2, 10 - i, 10 - 9i, -3)$ como combinação linear dos vetores $\{u_1, ..., u_4\}$. Use que

$$u = \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 + \langle u, u_4 \rangle u_4.$$

Resposta do item ii)

$$(1, 0, 0, 0) = \frac{1}{3} u_1 + \frac{1}{5}(2 + 4i) u_2 + \frac{1}{15}(4 - 2i) u_3$$

$$(2, 10 - i, 10 - 9i, -3) = 6u_1 - 5u_2 - 15iu_3 + 3iu_4.$$

Exercício 3. (F. 3.2, ex.1) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \text{ se } n = m \\ 0, \text{ se } n \neq m \end{cases} .$$

Exercício 4. (F. 3.2, ex.2) Mostre que o conjunto $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ das funções $\phi_n : [0, l] \to \mathbb{C}$, em que $\phi_n(x) = \left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}\right)$, $n \geq 1$, é um conjunto ortonormal, ou seja,

$$\langle \phi_n, \phi_n \rangle = \int_0^l \phi_n(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, \; n = m \\ 0, \; n \neq m \end{cases} .$$

Exercício 5. (F. 3.3, ex.4) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal de $L^2(a,b)$. Sejam $c>0$ e $d\in\mathbb{R}$ duas constantes e definamos $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ como o conjunto das funções $\psi_n(x)=c^{\frac{1}{2}}\phi_n(cx+d)$. Mostre que $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base ortonormal de $L^2\left(\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right)$. (Dica: Use mudança de coordenadas $y=cx+d$ para provar que o conjunto $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é ortonormal e satisfaz as propriedades de base)

Resolução:

Vamos mostrar que as funções formam base na demonstração de dois fatos:

Primeiro Fato: As funções ψ_n são ortonormais.

De fato,

$$\langle\psi_n,\psi_m\rangle=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}}\psi_n(y)\psi_m(y)dy=c\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}}\phi_n(cy+d)\phi_m(cy+d)dy=$$

$$\int_a^b\phi_n(x)\phi_m(x)dx=\delta_{nm}.$$

Na segunda igualdade fizemos a mudança de coordenadas $x=cy+d$ e $dx=cdy$.

Segundo Fato: Se $f\in L^2\left(\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right)$ e $\langle f,\psi_n\rangle=0$ para toda $n\in\mathbb{N}$, então $f=0$.

De fato,

$$0=\langle f,\psi_n\rangle=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}}f(y)\psi_n(y)dy=\int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}}f(y)\phi_n(cy+d)dy=$$

$$\int_a^b f\left(\frac{y-d}{c}\right)\phi_n(y)dy.$$

Concluímos que a função $\tilde{f}(y)=f\left(\frac{y-d}{c}\right)$ satisfaz $\left\langle\tilde{f},\phi_n\right\rangle=0$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Logo $\tilde{f}=0$, pois $\{\phi_n\}_n$ é uma base de $L^2(a,b)$. Desta maneira, $f=0$.

Os dois fatos anteriores implicam que $\{\psi_n\}_n$ é uma base de $L^2\left(\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right)$.

Exercício 6. (F. 3.3, ex.6) Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ o conjunto das funções dadas por $\phi_n(x)=\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$. No exercício 3, vimos que este conjunto é ortonormal. Mostre agora que ele é uma base de $L^2(0,l)$. Para tanto, siga o seguinte argumento:

i) Já vimos em sala de aula que $\psi_n(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}(nx)$, $n\geq1$ é uma base ortonormal de $L^2(0,\pi)$. Usando o exercício 5, conclua que a sequência de funções $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $\psi_n(x)=\left(\frac{1}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2l}\right)$, $n\geq1$ é uma base de $L^2(0,2l)$.

ii) Seja $f\in L^2(0,l)$. Vamos definir $\tilde{f}:[0,2l]\to\mathbb{C}$ por

$$\tilde{f}(x):=\begin{cases} f(x),\ x\in[0,l]\\ f(2l-x),\ x\in[l,2l]\end{cases}.$$

Mostre que $\left\langle\tilde{f},\psi_{2n-1}\right\rangle=\sqrt{2}\langle f,\phi_n\rangle$ e $\left\langle\tilde{f},\psi_{2n}\right\rangle=0$.

iii) Conclua que se $\langle f,\phi_n\rangle=0$ para todo n, então $f=0$. Logo $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ é uma base.

Exercício 7. (F. 3.3, ex.7) Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ o conjunto das funções dadas por $\phi_n(x)=\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$. No exercício 4, vimos que este conjunto é ortonormal. Mostre agora que ele é uma base de $L^2(0,l)$. Para tanto, siga o seguinte argumento do exercício anterior usando a função $\tilde{f}:[0,2l]\to\mathbb{C}$ dada por:

$$\tilde{f}(x):=\begin{cases} f(x),\ x\in[0,l]\\ -f(2l-x),\ x\in[l,2l]\end{cases}.$$

Exercício 8. (F. 3.3, ex.8) Ache a expansão das funções $f(x)=1$ e $g(x)=x$ em $[0,l]$ usando as bases dos exercícios 6 e 7. Use que

$$\phi=\sum_{n=1}^{\infty}\langle\phi,\phi_n\rangle\phi_n.$$

Resolução:

Basta observar que

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l\phi(y)\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy\right)\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$$

e

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^l \phi(y)\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)dy\right)\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right).$$

Calculando as integrais para f e g no lugar de ϕ, obtemos

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\text{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

$$g(x)=\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\text{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)=\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n-1)\pi-2}{(2n-1)^2}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right)$$

Exercício 9. (F. 3.3, ex.9) Suponha que $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ seja uma base ortonormal de $L^2(a,b)$. Mostre que para todo f e g pertence a $L^2(a,b)$ temos

$$\langle f,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\overline{\langle g,\phi_n\rangle}.$$

Dica: Use $f=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n$, $g=\sum_{n=1}^{\infty}\langle g,\phi_n\rangle\phi_n$ e as propriedades de ortonormalidade.
Resolução:

Basta observar que

$$\langle f,g\rangle=\left\langle\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\phi_n,\sum_{m=1}^{\infty}\langle g,\phi_m\rangle\phi_m\right\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\left\langle\langle f,\phi_n\rangle\phi_n,\sum_{m=1}^{\infty}\langle g,\phi_m\rangle\phi_m\right\rangle=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle\langle f,\phi_n\rangle\phi_n,\langle g,\phi_m\rangle\phi_m\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\overline{\langle g,\phi_m\rangle}\langle\phi_n,\phi_m\rangle=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\langle\phi_m,g\rangle\delta_{nm}=\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,\phi_n\rangle\langle\phi_n,g\rangle.$$

Exercício 10. (F. 3.5, ex.1) Sobre que condições nas constantes c e c' as condições de contorno $f(b)=cf(a)$ e $f'(b)=c'f'(a)$ são condições de contorno auto-adjuntas (isto é, $r\left(f'\overline{g}-f\overline{g'}\right)\big|_a^b=0$) para o operador $L(f)=(rf')'+pf$ em $[a,b]$?

Resposta: A condição é que $c\overline{c'}=\frac{r(a)}{r(b)}$.

Exercício 11. (F. 3.5, ex.3) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f''+\lambda f=0$, $f(0)=0$, $f'(l)=0$ em $[0,l]$? Use o exercício 6.

Resposta: Os autovalores são $\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\text{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)$, para $n=1,2,3,...$

Exercício 12. (F. 3.5, ex.4) Ache os autovalores e autofunções normalizadas para o problema $f''+\lambda f=0$, $f'(0)=0$, $f(l)=0$ em $[0,l]$? Use o exercício 7.

Resposta: Os autovalores são $\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi y}{l}\right)$, para $n=1,2,3,...$

Exercício 13. (F. 3.5, ex.7) Ache os autovalores e as autofunções normalizadas para o problema $f''+\lambda f=0$, $f(0)=0$, $f'(1)=-f(1)$ em $[0,l]$?

Resposta:Os autovalores são $\lambda_n=\nu_n^2$, em que ν_n são as soluções positivas de $tan(\nu)=-\nu$. As autofunções (autovalores) normalizados são $\phi_n(x)=c_n\text{sen}(\nu_n x)$, $c_n=\left[\frac{2}{(1+cos^2\nu_n)}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Exercício 14. (F. 3.5, ex.12) Considere o problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(r\frac{df}{dx}\right)+pf+\lambda f=0,\quad f(a)=f(b)=0.$$

i) Mostre que se f é uma solução do problema anterior, então

$$\lambda\int_a^b|f|^2\,dx=\int_a^b r\,|f'|^2\,dx-\int_a^b p\,|f|^2\,dx.$$

Dica: Use o fato de que $\lambda f=-(rf')-pf$ e integre por partes.
ii) Deduza que se $p(x)\leq C$ para todo x, então os autovalores do problema acima satisfazem $\lambda\geq -C$.

Resolução:

i) Vemos que $\lambda f = -\left(rf'\right)' - pf$. Logo

$$\lambda \int |f(x)|^2 \, dx = \lambda \int f(x)\overline{f(x)} dx = -\int \left(r(x)f'(x)\right)' \overline{f(x)} dx - \int pf(x)\overline{f(x)} dx =$$

$$-\left(rf'\right)\overline{f}\Big|_a^b + \int r(x)f'(x)\overline{f'(x)} dx - \int pf(x)\overline{f(x)} dx =$$

$$\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - \int p(x)\left|f(x)\right|^2 dx.$$

ii) Assim, se $p(x) \le C$ e f é uma autofunção com autovalor λ, obtemos

$$\lambda \int |f(x)|^2 \, dx = \int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - \int p(x)\left|f(x)\right|^2 dx \ge$$

$$\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - C\int \left|f(x)\right|^2 dx.$$

Como assumimos sempre no problema de Sturm-Liouville que $r(x) > 0$, concluímos que $\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx \ge 0$. Logo

$$\int r(x)\left|f'(x)\right|^2 dx - C\int \left|f(x)\right|^2 dx \ge -C\int \left|f(x)\right|^2 dx.$$

Concluímos por fim, que

$$\lambda \int |f(x)|^2 \, dx \ge -C\int |f(x)|^2 \, dx \implies \lambda \ge -C.$$

Exercício 15. (F. 4.2, ex.1) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 50,\ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx = \frac{200}{\pi\,(2n-1)}.$$

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = C,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 50,\ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{4C}{\pi\,(2n-1)}\right) \exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right) dx = \frac{200}{\pi\,(2n-1)}.$$

Exercício 17. (F. 4.2, ex.3) Resolva a equação abaixo:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),\ (t,x) \in]0,\infty[\times]0,l[\\ u(t,0) = 0,\ \ \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = C,\ t > \infty \\ u(0,x) = 50,\ \forall x \in]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:

$$u(t,x) = Ax + \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n - \frac{(-1)^n 8Al}{\pi^2\,(2n-1)^2}\right) \exp\left(\frac{-\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 kt}{l^2}\right) \operatorname{sen}\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}\right),$$

em que
$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\text{sen}\left(\frac{(2n-1)\,\pi x}{2l}\right)dx = \frac{200}{\pi\,(2n-1)}.$$

Exercício 18. (F. 4.2, ex.5) Resolva a equação abaixo:
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + e^{-2t}\text{sen}\,(x)\,,\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,\pi[\\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = 0,\ \forall x \in\,]0,\pi[\end{cases}.$$

Resposta:
$$u(t,x) = \left(e^{-2t} - e^{-kt}\right)\frac{\text{sen}(x)}{k-2},\quad k \neq 2$$
$$u(t,x) = te^{-2t}\text{sen}(x),\quad k = 2.$$

Exercício 19. (F. 4.3, ex.5) Resolva a equação abaixo:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - a^2 u(t,x),\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:
$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\lambda_n t\right) + b_n\text{sen}\left(\lambda_n t\right)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \ \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} + a^2.$$

Exercício 20. (F. 4.3, ex.6) Resolva a equação abaixo:
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) - 2k\frac{\partial u}{\partial t},\ (t,x)\in\,]0,\infty[\,\times\,]0,l[\\ u(t,0) = u(t,l) = 0,\ t > \infty \\ u(0,x) = f(x),\ \forall x \in\,]0,l[\\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x),\ \forall x\in\,]0,l[\end{cases}.$$

Resposta:
$$u\,(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt}\left(a_n\cos\left(\lambda_n t\right) + b_n\text{sen}\left(\lambda_n t\right)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\ \ \lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2c^2}{l^2} - k^2.$$

Se $k > \frac{\pi c}{l}$, então o termo λ_n será imaginário e teremos funções hiperbólicas. Como $|\lambda_n| < k$, os termos $e^{-kt}\cos\left(\lambda_n t\right)$ e $e^{-kt}\text{sen}\left(\lambda_n t\right)$ são exponencialmente decrescentes em t.