LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - TÓPICOS DE MATEMÁTICA APLICADA (MAP 2313)

PROF: PEDRO T. P. LOPES   WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/TMA

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do G. Folland e do D. Figueiredo. (F. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Folland e (D. X, ex.Y) indica o exercício Y do capítulo X do livro do Djairo. Nos exercícios abaixo denotaremos a transformada de Fourier por $\mathcal{F}(f)$ ou por $\hat{f}$.

Exercício 1. (D. 6, ex.2.2) Calcule as transformadas de Fourier das funções abaixo:

i) $u_a(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x| \leq a \\ 0, \text{ se } |x| > a \end{cases}$, para uma constante $a > 0$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a}, \text{ se } |x| \leq a \\ 0, \text{ se } |x| > a \end{cases}$.

iii) $f(x) = e^{-a|x|}$.

iv) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } |x| \leq a \end{cases}$, para uma constante $a > 0$.

v) $f(x) = e^{-ax^2}$, para uma constante $a > 0$.

Respostas:

i) $\frac{2sen(a\xi)}{\xi}$.

ii) $\frac{2(1-cos(a\xi))}{a\xi^2}$.

iii) $\frac{2a}{a^2+\xi^2}$.

iv) $\frac{1}{a+i\xi}$.

v) $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$

Exercício 2. (D. 6, ex.2.3) Encontre uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que $\hat{f} = f$, ou seja, tal que f seja igual a sua transformada de Fourier. (Lembre-se dos exemplos dados em sala de aula)

Resposta: **Na verdade, o enunciado deveria ter sido $\hat{f} = \sqrt{2\pi} f$. (Ele foi retirado do Djairo que coloca uma convenção diferente para $\mathcal{F}$)**

Uma função que satisfaz esta relação é $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercício 3. (D. 6, ex.2.4) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função par, ou seja, $f(x) = f(-x)$, então a sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função que assume apenas valores reais, ou seja, $\hat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Resolução: **Devemos assumir também que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Faltou esta hipótese no enunciado).**

Com a hipótese acima, basta observar que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} f(x)\, dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{ix\xi} f(-x)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\, dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}\right) f(x)\, dx = 2\int_{0}^{\infty} cos(x\xi) f(x)\, dx \in \mathbb{R}.$$

Exercício 4. (D. 6, ex.2.5) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função ímpar, ou seja, $f(x) = -f(-x)$, então a sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função que assume apenas valores imaginários puros, ou seja, $\hat{f}(\xi)$ é um imaginário puro para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

Resolução: **Devemos assumir também que $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Faltou esta hipótese no enunciado).**

Com a hipótese acima, basta observar que

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} f(x)\, dx =$$

$$\int_0^\infty e^{-ix\xi} f(x)\,dx + \int_0^\infty e^{ix\xi} f(-x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi} f(x)\,dx - \int_0^\infty e^{ix\xi} f(x)\,dx =$$
$$\int_0^\infty \left(e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}\right) f(x)\,dx = -2i \int_0^\infty sen(x\xi) f(x)\,dx.$$

Como $\int_0^\infty sen(x\xi) f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, concluímos que $\mathcal{F}(f)(\xi)$ é um imaginário puro.

Exercício 5. (D. 6, ex.2.6) Seja $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ uma função em $L^1(\mathbb{R})$. Defina

i) A transformada cosseno de Fourier
$$\mathcal{F}_c(f)(\xi) = \int_0^\infty cos(x\xi) f(x)\,dx.$$
ii) A transformada seno de Fourier
$$\mathcal{F}_s(f)(\xi) = \int_0^\infty sen(x\xi) f(x)\,dx.$$
Mostre que se estendermos f como um função par, temos
$$\mathcal{F}_c(f) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f).$$
Mostre que se estendermos f como uma função ímpar, temos
$$\mathcal{F}_s(f) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}(f).$$
Resolução:

Se $\tilde{f}$ é a extensão par de f, então
$$\mathcal{F}\left(\tilde{f}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx =$$
$$\int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx + \int_0^\infty e^{ix\xi}\tilde{f}(-x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx + \int_0^\infty e^{ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx =$$
$$\int_0^\infty \left(e^{-ix\xi} + e^{ix\xi}\right)\tilde{f}(x)\,dx = 2\int_0^\infty cos(x\xi) f(x)\,dx = 2\mathcal{F}_c(f)(\xi).$$
Se $\tilde{f}$ é a extensão ímpar de f, então
$$\mathcal{F}\left(\tilde{f}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx =$$
$$\int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx + \int_0^\infty e^{ix\xi}\tilde{f}(-x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx - \int_0^\infty e^{ix\xi}\tilde{f}(x)\,dx =$$
$$\int_0^\infty \left(e^{-ix\xi} - e^{ix\xi}\right)\tilde{f}(x)\,dx = -2i\int_0^\infty sen(x\xi) f(x)\,dx = -2i\mathcal{F}_s(f)(\xi).$$

Exercício 6. (D. 6, ex.2.7) Seja $\mathcal{F}$ a transformada de Fourier. Mostre que:

i) $\mathcal{F}(f(-x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$.
ii) $\mathcal{F}\left(\overline{f(x)}\right)(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$.
iii) $\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(\xi) = a\mathcal{F}(f)(a\xi)$, $a > 0$.
iv) $\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi)$, $b \in \mathbb{R}$.
v) $\mathcal{F}\left(f(x)e^{-icx}\right)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi + c)$, $c \in \mathbb{R}$.
Resolução:

i)
$$\mathcal{F}(f)(-\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix(-\xi)} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{ix\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi} f(-x)\,dx = \mathcal{F}(f(-x))(\xi).$$
ii)
$$\mathcal{F}\left(\overline{f(x)}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-ix\xi}\overline{f(x)}dx = \overline{\int_{-\infty}^\infty e^{ix\xi} f(x)\,dx} = \overline{\int_{-\infty}^\infty e^{-ix(-\xi)} f(x)\,dx} = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}.$$
iii)
$$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\frac{x}{a}\xi} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\frac{x}{a}\xi} f\left(a\frac{x}{a}\right) a\frac{1}{a}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-iy\xi} f(ay)\,ady = a\mathcal{F}(f)(a\xi).$$

iv)

$$\mathcal{F}(f(x-b))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x-b)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y+b)\xi} f(y)\,dy = e^{-ib\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y)\,dy = e^{-ib\xi}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

v)

$$\mathcal{F}\left(f(x)\,e^{-icx}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - icx} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi+c)} f(x)\,dx = \mathcal{F}(f)(\xi+c).$$

Exercício 7. (D. 6, ex.2.8) Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:

i) $e^{-\frac{(x-3)^2}{2}}$

ii) $e^{-(2x+1)^2}$

iii) f tal que $f(2)=1$, $f(x)=0$, se $|x-2|\geq 1$ e f é uma função seccionalmente linear (o gráfico de f será um triângulo com centro em 2)

Respostas:

i) $e^{-3i\xi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

ii) Vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-(2x+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}e^{-4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\left(y-\frac{1}{2}\right)\xi}e^{-4y^2}dy = e^{i\frac{\xi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi}e^{-4y^2}dy = \sqrt{\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\xi}{2}-\frac{\xi^2}{16}}.$$

iii) Vemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} e^{-ix\xi}(x-1)\,dx + \int_{2}^{3} e^{-ix\xi}(3-x)\,dx.$$

Exercício 8. (D. 6, ex.2.9) Calcule a transformada de Fourier das funções abaixo:

i) $e^{-a|x|}cos(cx)$.

ii) $e^{-ax^2}sen(cx)$.

Respostas:

i) $\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{a^2+(\xi-c)^2}+\frac{2a}{a^2+(\xi+c)^2}\right)$.

ii) $\frac{1}{2i}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{(\xi-c)^2}{4a}}-\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{(\xi+c)^2}{4a}}\right)$.

Exercício 9. (D. 3.3, ex.2.10) Mostre que

i) $\mathcal{F}(f(x)\,cos(cx)) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\xi-c)+\hat{f}(\xi+c)\right]$.

ii) $\mathcal{F}(f(x)\,sen(cx)) = \frac{1}{2i}\left[\hat{f}(\xi-c)-\hat{f}(\xi+c)\right]$.

Resolução:

i)

$$\mathcal{F}(f(x)\,cos(cx)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}cos(cx)\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\frac{e^{icx}+e^{-icx}}{2}f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-c)}f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi+c)}f(x)\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\xi-c)+\hat{f}(\xi+c)\right].$$

ii)

$$\mathcal{F}(f(x)\,sen(cx)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}sen(cx)\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\frac{e^{icx}-e^{-icx}}{2i}f(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{2i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-c)}f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi+c)}f(x)\,dx\right] = \frac{1}{2i}\left[\hat{f}(\xi-c)-\hat{f}(\xi+c)\right].$$

Exercício 10. (D. 3.5, ex.3.1) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função linear tal que f e f' pertencem a $L^1(\mathbb{R})$ e tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$. Mostre que $\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$. (Dica: Integre por partes)

Resolução: Basta observar que

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f'(x)\,dx = e^{-ix\xi}f(x)\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(e^{-ix\xi}\right)f(x)\,dx =$$

$$i\xi\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f(x)\,dx = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Exercício 11. (D. 3.5, ex.3.4) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função de classe $L^1(\mathbb{R})$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=0$. Mostre que

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)(\xi)=\frac{1}{i\xi}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Resolução:

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)dx=$$

$$\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}\left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi}f(x)\,dx=\frac{1}{i\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}f(x)\,dx=\frac{1}{i\xi}\mathcal{F}(f)(\xi).$$

Exercício 12. (D. 3.5, ex.3.7) Mostre que se $f\in L^1(\mathbb{R})$ for contínua, então
i) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)=2\pi f(-x)$.
ii) $\mathcal{F}^4(f)(x)=(2\pi)^2 f(x)$.

Exercício 13. (D. 3.5, ex.3.16) Ache um exemplo de função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ que seja $L^1(\mathbb{R})$ de classe C^∞, ou seja, infinitamente diferenciável, mas que $\mathcal{F}(f)$ não seja diferenciável em todos os pontos. (Dica: Pense nos exemplos dados em sala de aula)

Resposta: Um possível exemplo é $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, em que $\hat{f}(\xi)=\pi e^{-|\xi|}$ não é diferenciável em $\xi=0$.

Exercício 14. (F. 7.1, ex.4) Seja $f(x)=e^{-x^2}$ e $g(x)=e^{-2x^2}$. Calcule $f*g$. (Dica: Complete quadrados e use que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$).
Resolução:

$$f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2}e^{-2t^2}dt=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+2xt-t^2-2t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-3t^2+2xt}dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-3\left(t^2-\frac{2}{3}xt\right)}dt=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-3\left[\left(t-\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{1}{9}x^2\right]}dt=e^{-\frac{2}{3}x^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\left(t-\frac{1}{3}x\right)^2}dt=$$

$$\frac{e^{-\frac{2}{3}x^2}}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{3}s\right)^2}\sqrt{3}ds=\frac{e^{-\frac{2}{3}x^2}}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}dw=\sqrt{\frac{\pi}{3}}e^{-\frac{2}{3}x^2}.$$

Exercício 15. (F. 7.1, ex.5) Seja $f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Mostre que $f_t*f_s=f_{t+s}$.
Resolução: Feito em sala de aula.

Exercício 16. (F. 4.2, ex.2) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a função dada por

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ se } |x|\le 1\\ 0, \text{ se } |x|>1\end{cases}.$$

i) Calcule $f*f$ e $f*f*f$.
ii) Seja $f_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon}f\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ e $g(x)=x^3-x$. Calcule $f_\epsilon*g$ e mostre que $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon*g=2g$ diretamente.
Solução:
i)

$$f*f(x)=\begin{cases}x+2,\ -2\le x\le 0\\ 2-x,\ 0\le x\le 2\\ 0, \text{ de outra forma}\end{cases}.$$

e

$$f*f*f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+3)^2,\ -3\le x\le -1\\ 3-x^2,\ -1\le x\le 1\\ \frac{1}{2}(3-x)^2,\ 1\le x\le 3\\ 0, \text{ de outra forma}\end{cases}$$

ii) $f_\epsilon*g(x)=2x^3+\left(8\epsilon^2-2\right)x$.

Exercício 17. (F. 7.4, ex.1) Calcule as seguintes transformadas de Fourier seno e cosseno:
i) $\mathcal{F}_s\left(e^{-kx}\right)$
ii) $\mathcal{F}_c\left(e^{-kx}\right)$
iii) $\mathcal{F}_c\left((1+x)\,e^{-kx}\right)$
iv) $\mathcal{F}_s\left(xe^{-kx}\right)$
Resolução:
i) $\frac{\xi}{\xi^2+k^2}$
ii) $\frac{k}{\xi^2+k^2}$
iii) $\frac{2}{(1+\xi^2)^2}$ é a solução para $k=1$.
iv) $\frac{2\xi}{(1+\xi^2)^2}$

Exercício 18. (F. 7.4, ex.1) Resolva a equação do calor

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)\,,\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

para

$$f(x) = \begin{cases} T,\ |x|\le a \\ 0,\ |x|>a \end{cases}.$$

Resolução:
Aplicando a Transformada de Fourier em u na variável x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -k\xi^2\hat{u}(t,\xi)\,,\ \xi\in\mathbb{R},\ t>0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi),\ \xi\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Logo vemos que

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\,e^{-k\xi^2 t}.$$

Assim

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\,e^{-k\xi^2 t}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-T}^{T} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\,dy.$$

Exercício 19. (D. 4.3, ex.5) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + g(t,x)\,,\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(0,x) = f(x),\ x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Resolução:
Vamos achar a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + g(t,x)\,,\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ u(0,x) = 0,\ x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Aplicando a Transformada de Fourier em u na variável x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -k\xi^2\hat{u}(t,\xi) + \hat{g}(t,\xi)\,,\ \xi\in\mathbb{R},\ t>0 \\ \hat{u}(0,\xi) = 0,\ \xi\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

Logo vemos que

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_0^t e^{-k\xi^2(t-s)}\hat{g}(s,\xi)\,ds.$$

Assim

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t e^{-k\xi^2(t-s)}\hat{g}(s,\xi)\,ds\right) = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2(t-s)}\hat{g}(s,\xi)\right)ds =$$

$$\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2(t-s)}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{g}(s,\xi)\right)ds = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} g(s,y)\,dy\right)ds.$$

Logo a solução final (usando princípio da superposição) é

$$u(t,x) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-s)}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t-s)}} g(s,y)\,dy\right)ds + \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\,dy.$$

Exercício 20. (D. 4.3, ex.6) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + bu(t,x), \ x \in \mathbb{R},\, t>0 \\ u(0,x) = f(x), \ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Resolução:
Aplicando a Transformada de Fourier em u na variável x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(t,\xi) = -k\xi^2\hat{u}(t,\xi) + b\hat{u}(t,\xi), \ \xi \in \mathbb{R},\, t>0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi), \ \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Logo vemos que

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\, e^{-k\xi^2+bt}.$$

Assim

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\, e^{-k\xi^2 t}e^{bt}\right) = e^{bt}\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{f}(\xi)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-k\xi^2 t}\right) = \frac{e^{bt}}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}} f(y)\, dy.$$

Exercício 21. (D. 4.3, ex.7) Use a transformada de Fourier para resolver o problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + h(t,x), \ x \in \mathbb{R},\, t>0 \\ u(0,x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Resolução:
Aplicando a Transformada de Fourier em u na variável x, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t,\xi) = -c^2\xi^2\hat{u}(t,\xi) + \hat{h}(t,\xi), \ \xi \in \mathbb{R},\, t>0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0,\xi) = 0, \ \xi \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Logo vemos que

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_0^t \frac{sen\,(c\xi\,(t-s))}{c\xi}\hat{h}(s,\xi)\, ds.$$

Assim

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t \frac{sen\,(c\xi\,(t-s))}{c\xi}\hat{h}(s,\xi)\, ds.\right) = \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{sen\,(c\xi\,(t-s))}{c\xi}\hat{h}(s,\xi)\right) ds =$$

$$\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{sen\,(c\xi\,(t-s))}{c\xi}\right) * \mathcal{F}^{-1}\left(\hat{h}(s,\xi)\right) ds = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2c}\chi_{c(t-s)}(x-y)\, h(s,y)\, dy\right) ds,$$

em que $\chi_a(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } |x| \le a \\ 0, \text{ se } |x| > a \end{cases}.$