ALGUMAS DICAS RÁPIDAS PARA A PROVA

1. Sobre a matéria da P3

A matéria da P3 começou a ser dada por volta do dia 13 de maio e acabou no dia 12 de junho. Vejam a seção aula por aula do site para ter uma ideia aproximada do que foi dado.

Neste período aprendemos a integrar sobre superfícies. De fato, vimos dois tipos de integral: Integral de superfície e integral de fluxo sobre uma superfície.

Aprendemos também dois teoremas importantes sobre essas integrais: Teorema da Divergência e Teorema de Stokes.

Assim, a parte mais importante da matéria foram esses 4 tópicos: integrais de superfície, de fluxo numa superfície, Teorema da Divergência e Teorema de Stokes (versão do Apostol). Tudo pode ser encontrado no Apostol volume 2, capítulo 12: Surface Integrals.

Abaixo recordamos definição das integrais e o significado dos teoremas.

Definição 1. Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A integral de superfície de uma função contínua (escalar) $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que $S \subset U$ e U é um aberto de $\mathbb{R}^3$, é definida como

$$\int\int_S f dS = \int\int_\Omega f \circ \varphi(u,v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| dudv.$$

Se $f = 1$, então a integral acima nos dá a área da superfície. Se f é a densidade de um material, então a integral acima nos dá a massa do material ocupado na superfície. Podemos também definir centro de massa e momento de inércia usando essas integrais.

2) A integral do fluxo de uma função contínua (vetorial) $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sobre a superfície S, em que $S \subset U$ e U é um aberto de $\mathbb{R}^3$, é definida como $\int\int_S \langle f, n\rangle \, dS$. Como $n = \pm \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \|}$ e $dS = \| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \| \, dudv$, concluímos que a integral pode ser calculada como

$$\pm \int\int_\Omega \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv.$$

O sinal é definida pelo sentido da normal que se quer calcular. Ou seja, o sentido de n tem que ser dado no problema.

Observação 2. Observemos que se $\varphi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v) \, Z(u,v))$, então

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial (Y,Z)}{\partial (u,v)}, \frac{\partial (Z,X)}{\partial (u,v)}, \frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} \right),$$

em que

$$\frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}, \; \frac{\partial (Y,Z)}{\partial (u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{pmatrix}, \; \frac{\partial (Z,X)}{\partial (u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Logo, se $f = (P, Q, R)$, concluímos que

$$\int\int_\Omega \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\rangle dudv = \int\int_\Omega \left(P \frac{\partial (Y,Z)}{\partial (u,v)} + Q \frac{\partial (Z,X)}{\partial (u,v)} + R \frac{\partial (X,Y)}{\partial (u,v)} \right) dudv.$$

Isso motiva ("cortando $dudv$") a seguinte notação para o fluxo de uma superfície

$$\int\int_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Note que para a integral acima, assim como na notação $\int\int_S \langle f, n\rangle \, dS$, é necessário dizer qual a direção da normal e, ao calculá-la, verificar se $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ aponta na direção que se quer ou na oposta. Isso determina o sinal da integral.

Vamos agora enunciar os dois teorema principais.

Teorema 3. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então*

$$\int\int\int_\Omega \nabla . f dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle f, n\rangle \, dS,$$

em que n é a normal unitária que aponta para fora. Observemos que se $f = (f_1, f_2, f_3)$, então definimos $\nabla . f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$.

Teorema 4. *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*

$$\int\int_S \nabla \times f.ndS = \int_{\partial S} f.d\alpha,$$

em que $\int_{\partial S} f.d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície (que podem ser composto de mais de uma linha se a superfície tiver furos) e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita: para efetuar a integral em cada linha, a tangente da linha (o sentido para o qual ela está caminhando) aponta na direção do indicador. A normal aponta na direção do polegar. A direção que está entrando na superfície é aquela para onde o dedo médio aponta.

Vimos algumas relações interessantes em relação ao rotacional, divergente e gradiente. É interessante lembrar que $\nabla.(\nabla \times f) = 0$ para toda função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$de classe C^2, ou seja, o divergente do rotacional é igual a zero.

Por outro lado, vimos que se f é de classe C^1 e é tal que $\nabla.f = 0$, então para todo $x \in U$, existe uma bola $B(x,r) \subset U$ e uma função $g : B(x,r) \to \mathbb{R}^3$ de classe C^2 tal que $f = \nabla \times g$. Isso é análogo ao que vimos quando estudamos campos conservativos na segunda parte da matéria (P2).

2. Algumas breves dicas sobre exercícios

A prova será baseada nas listas, claro. Quanto mais exercícios forem feitos melhor.

No entanto, para aqueles que estão com pouco tempo, eu sugiro que comecem pelos exercícios mais mecânicos. Assim, é possível treinar um pouco os conceitos acima, sem quebrar tanto a cabeça.

O segundo exercício da lista 6 é simples e pode servir para entender o teorema de Stokes. Os exercícios 7 e 8 da lista 6 serviram de inspiração para um exercício da prova do ano passado.

O exercício 8 da lista 5 é interessante para entender o teorema da divergência. O exercício 9 da lista 5 também é bem mecânico. O exercício 4 da lista 5 pode ajudar a entender a definição de integral de fluxo na superfície. Acredito que o exercício 3 da lista 5 possa ajudar a entender a definição de integral de superfície (veja no Apostol a definição de cento de massa. E cuidado! Na lista eu coloquei $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$. Na verdade é $x \ge 0$ e $y \ge 0$).

Enfim, conforme avançam nos exercícios, é possível começar a pensar nos exercícios que envolvem intersecções de superfícies e etc. Em geral, eles não têm muita novidade conceitual. A dificuldade maior é achar uma parametrização adequada.

Também sugiro que deem uma olhada na prova do ano passado. Ela está no site junto com a sua resolução. Ela pode servir para dar uma ideia do que pode ser cobrado e para treinar também.