LISTA DE EXERCÍCIOS 1 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados do livro do Apostol e do Domingues, Callioli, Costa.

Exercício 1. (Apostol seção 1.5 exercícios 1, 5, 8, 9, 12, 14, 17, 25)

Para os itens a) até g), considere os seguintes subconjuntos das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com a operação de soma entre funções e multiplicação por escalar definidas de maneira usual. Quais dos conjuntos abaixo são espaços vetoriais?

a) Conjunto das funções da forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, em que P e Q são polinômios e Q não tem raízes reais.

b) Conjunto das funções que satisfazem: $f(1) = 1 + f(0)$.

c) Conjunto das funções tais que: $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Conjunto das funções tais que: $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

e) Conjunto das funções tais que: $f(x + 2\pi) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Conjunto das funções tais que: $\int_0^1 f(x)\, dx \geq 0$.

g) Conjunto das soluções do problema: $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) + P(x) \frac{df}{dx}(x) + Q(x) f(x) = 0$, em que P e Q são funções contínuas.

Para o item h), considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$ com a operação de soma e multiplicação por escalar definidas de maneira usual. Ele é um espaço vetorial?

h) Conjunto dos elementos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $3x + 4y = 1$, $z = 0$.

Resposta: Sim = é espaço vetorial. Não = não é espço vetorial

a) Sim. b) Não. c) Sim. d) Sim. e) Sim. f) Não. g) Sim. h) Não.

Exercício 2. (Apostol seção 1.5 exercício 31)

Considere o conjunto $\mathbb{R}^2$ com a operação de soma e multiplicação por escalar definidas abaixo. Quando as operações abaixo definem espaços vetoriais? Se não definirem, justifique.

a) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ $a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$.

b) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$ $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$.

c) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$ $a(x_1, x_2) = (ax_1, x_2)$.

d) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|)$ $a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|)$.

Resposta: a) Não define, pois $1(0,1) = (0,0) \neq (0,1)$.

b) Não define, pois dado $(0,1)$, não existe um elemento nulo (x, y) tal que $(0,1) + (x,y) = (0,1)$

c) Não define, pois sabemos que num espaço vetorial $0(0,1) = (0,0)$. Mas, no caso temos $0(0,1) = (0,1)$.

d) Não define pois $1(-1,0) = (1,0) \neq (-1,0)$.

Exercício 3. (Apostol seção 1.10 exercícios 1 a 10) Quais dos seguintes subconjuntos $S \subset \mathbb{R}^3$ são subespaços vetoriais? Determine a dimensão, quando forem subespaços. Denotamos os elementos de $\mathbb{R}^3$ por (x, y, z).

1. $x = 0$
2. $x + y = 0$
3. $x + y + z = 0$
4. $x = y$
5. $x = y = z$.
6. $x = y$ ou $x = z$.
7. $x^2 - y^2 = 0$
8. $x + y = 1$.
9. $y = 2x$ e $z = 3x$.
10. $x + y + z = 0$ e $x - y - z = 0$.

Resposta:

1. Sim, 2.
2. SIm, 2.
3. Sim, 2.
4. Sim, 2.
5. Sim, 1.

6. Não.
7. Não.
8. Não.
9. Sim, 1.
10. Sim, 1.

Exercício 4. (Apostol seção 1.10 exercícios 11 a 20) Quais dos subconjuntos dos polinômios de ordem $\leq n$, isto é, de $\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n,\ a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$, são subespaços vetoriais? Determine a dimensão dos que forem subespaços.

1. $f(0) = 0$.
2. $f'(0) = 0$.
3. $f''(0) = 0$.
4. $f(0) + f'(0) = 0$.
5. $f(0) = f(1)$.
6. $f(0) = f(2)$
7. $f(x) = f(-x)$
8. $f(x) = -f(-x)$
9. f tem grau menor ou igual a $k \leq n$ ou $f = 0$.
10. f tem grau k, em que $k < n$ ou $f = 0$.

Resposta:
1. Sim, n.
2. Sim, n.
3. Sim, n.
4. Sim, n.
5. Sim, n.
6. Sim, n.
7. Sim. A dimensão é igual a $1 + \frac{n}{2}$ se n é par, $\frac{n+1}{2}$ se n é ímpar.
8. Sim. A dimensão é igual a $\frac{n}{2}$ se n é par, $\frac{n+1}{2}$ se n é ímpar.
9. Sim. $k + 1$.
10. Não.

Exercício 5. (Apostol seção 1.10 exercício 22) Seja $S \subset V$ e $T \subset V$ dois subconjuntos de V. Denotamos por $L(S)$ (analogamente por $L(T)$) o conjunto das combinações lineares de S, ou seja, dos elementos $a_1 u_1 + ... + a_k u_k$, em que $u_1, ..., u_k \in S$, $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}_0$. Mostre que

1. $S \subset L(S)$.
2. Se $S \subset T \subset V$ e T é um subespaço vetorial de V, então $L(S) \subset T$. (Isto é o que significa dizer que $L(S)$ é o menor subespaço de V que contém S).
3. S é um subespaço vetorial se, e somente se, $S = L(S)$.
4. Se $S \subset T \subset V$, então $L(S) \subset L(T) \subset V$.
5. Se S e T são subespaços vetoriais de V, então $S \cap T$ também é um subespaço de V.
6. Se S e T são subconjuntos de V, então $L(S \cap T) \subset L(S) \cap L(T)$.
7. Dê um exemplo de subconjuntos de V tais que $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

Exercício 6. (Apostol seção 1.10 exercício 24) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $S \subset V$ um subespaço de V. Prove cada uma das seguintes afirmações:

a) S é um espaço vetorial de dimensão finita, então $dim(S) \leq dim(V)$.
b) $dim(S) = dim(V)$ se, e somente se, $S = V$.
c) Toda base de S é parte de uma base de V.
d) Uma base de V não contém necessariamente uma base de S. (Ache um exemplo)

Exercício 7. (Apostol seção 1.13 exercício 1) As funções $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas abaixo definem um produto interno? Justifique.

a) $\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n x_j |y_j|$.
b) $\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right|$.
c) $\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)$.
d) $\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2 y_j^2}$.
e) $\langle (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \rangle = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 - \sum_{j=1}^n y_j^2$.

Resposta: Apenas e define um produto interno.

Exercício 8. (Apostol seção 1.13 exercícios 3., 4., 5., 6.) Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ e $\|.\| : V \to [0,\infty[$ a norma que vem deste produto interno. Mostre que as seguintes afirmações são válidas:
a) $\langle u,v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u+v\| = \|u-v\|$.
b) $\langle u,v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.
c) $\langle u,v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u+cv\| \geq \|u\|$, para todo $c \in \mathbb{R}$.
d) $\langle u+v, u-v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u\| = \|v\|$.

Resolução:
a) Vemos que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle + 2\langle u,v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v \rangle .$$
$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle - 2\langle u,v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v \rangle .$$

Assim, $\|u+v\| = \|u-v\|$ se, e somente se, $+2\langle u,v \rangle = -2\langle u,v \rangle$, ou seja, $\langle u,v \rangle = 0$.
b) Vemos que

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle v,v \rangle + 2\langle u,v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v \rangle .$$

Logo $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ se, e somente se, $\langle u,v \rangle = 0$.
c) Vemos que

$$\|u+cv\|^2 = \langle u+cv, u+cv \rangle = \langle u,u \rangle + c^2\langle v,v \rangle + 2c\langle u,v \rangle .$$

Assim $\|u+cv\|^2 \geq \|u\|^2$ para todo c, se, e somente se,

$$c^2\|v\|^2 + 2c\langle u,v \rangle \geq 0$$

para todo $c \in \mathbb{R}$. Mas isso só ocorre se o polinômio em c dado acima tem no máximo uma raiz real. Logo $(2\langle u,v \rangle)^2 \leq 0$, ou seja, $\langle u,v \rangle = 0$.
Usamos que $ax^2 + bx + cx$ tem no máximo uma raiz real $\iff$ $b^2 - 4ac \leq 0$.
d) Vemos que

$$\langle u+v, u-v \rangle = \langle u,u \rangle + \langle u,-v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 .$$

Logo $\langle u+v, u-v \rangle = 0$ se, e somente se, $\|u\| = \|v\|$.

Exercício 9. (Apostol seção 1.13 exercício 10) Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a n. Definamos $\langle .,. \rangle : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ por

$$\langle f,g \rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right).$$

Mostre que:
a) $\langle .,. \rangle : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ define um produto interno.
b) Calcule $\langle t, at+b \rangle$.
c) Ache todos os polinômios ortogonais a t.

Resposta: Para provar o item $a)$ use que um polinômio de grau n com $n+1$ raízes nulas é igual a 0.

Exercício 10. (Apostol seção 1.13 exercício 11) Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial de todos os polinômios reais. Definamos $\langle .,. \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ por

$$\langle f,g \rangle = \int_0^\infty e^{-t} f(t)\, g(t)\, dt.$$

a) Mostre que $\langle .,. \rangle : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ define um produto interno.
b) Mostre que $\langle t^m, t^n \rangle = (m+n)!$.
c) Calcule $\left\langle (1+t)^2, 1+t^2 \right\rangle$.
d) Ache todos os polinômios de ordem ≤ 1 que são ortogonais a $1+t$.

Exercício 11. (Apostol seção 1.13 exercícios 12) Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a n. Verifique se $\langle .,. \rangle : \mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ definidas abaixo definem um produto interno. Justifique.
a) $\langle f,g \rangle = f(1)\, g(1)$.
b) $\langle f,g \rangle = \left| \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \right|$.
c) $\langle f,g \rangle = \int_0^1 \frac{df}{dt}(t) \frac{dg}{dt}(t)\, dt$.

d) $\langle f, g\rangle = \left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right)$.

Resposta: Se $n \geq 1$, nenhum deles definem um produto interno.

Exercício 12. (Apostol seção 1.13 exercício 15.) Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Mostre que as seguintes identidades são válidas:

a) $\langle au, bv\rangle = a\bar{b}\langle u, v\rangle$.

b) $\langle u, av + bw\rangle = \bar{a}\langle u, v\rangle + \bar{b}\langle u, w\rangle$.

Exercício 13. (Apostol seção 1.13 exercício 16.) Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ e $\|.\| : V \to [0, \infty[$ a norma que vem deste produto interno. Mostre as seguintes identidades são válidas:

a) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle$

b) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2\langle u, v\rangle + 2\langle v, u\rangle$

c) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

Exercício 14. (Apostol seção 1.17 exercício 1) Para cada um dos casos abaixo, ache uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores dados:

1. $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$ e $u_3 = (3,2,3)$.
2. $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,-1)$, $u_3 = (1,0,1)$

Dica: Use Gra-Schmidt.

Exercício 15. (Apostol seção 1.17 exercício 2) Para cada um dos casos abaixo. acho uma base ortonormal para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores dados:

1. $u_1 = (1,1,0,0)$, $u_2 = (0,1,1,0)$, $u_3 = (0,0,1,1)$ e $u_4 = (1,0,0,1)$.
2. $u_1 = (1,1,0,1)$, $u_2 = (1,0,2,1)$ e $u_3 = (1,2,-2,1)$.

Exercício 16. (Apostol seção 1.17 exercício 4) Considere o conjunto de todos os polinômios com o produto interno $\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(t)\,v(t)\,dt$. Prove que as funções

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \sqrt{3}\,(2t-1), \quad y_3(t) = \sqrt{5}\left(6t^2 - 6t + 1\right)$$

formam uma base ortonormal do conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

Exercício 17. (Apostol seção 1.17 exercício 9) Considere o conjunto das funções contínuas definidas no intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, $C([0, 2\pi])$. Definamos o produto interno $\langle u, v\rangle := \int_0^{2\pi} u(t)\,v(t)\,dt$. Ache o vetor contido no subespaço gerado por $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ que melhor aproxima a função x.

Exercício 18. (Domingues, Callioli, Costa Capítulo 3 exercício 10 e 11)

Seja V um espaço vetorial e $\{u_1, ..., u_k\} \subset V$ um conjunto linearmente independente.

1. Mostre que $\{a_1u_1, ..., a_ku_k\}$ é linearmente independente, sempre que $a_j \neq 0$, para todo $j = 1, ..., k$.
2. Mostre que $\{u_1 + au_j, u_2, u_3, ..., u_k\}$ é linearmente independente, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Resolução:

1. De fato, sejam α_1, ..., α_n tais que

$$\alpha_1 a_1 u_1 + ... + \alpha_k a_k u_k = 0.$$

Logo $\alpha_1 a_1 = \alpha_2 a_2 = ... = \alpha_n a_n = 0$. Como $a_j \neq 0$ para todo j, vemos que $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Logo o conjunto $\{a_1u_1, ..., a_ku_k\}$ é L.I.

2. Sejam α_1, ..., α_n tais que

$$\alpha_1(u_1 + au_j) + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_k u_k = 0.$$

Logo

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + (\alpha_j + \alpha_1 a)\,u_j + ... + \alpha_k u_k = 0.$$

Assim, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_j + \alpha_1 a = ... = \alpha_k = 0$. Logo $\alpha_k = 0$ para $k \neq j$ e $\alpha_j + \alpha_1 a = 0$. Como $\alpha_1 = 0$, concluímos que α_j também é igual a 0.

Exercício 19. (Domingues, Callioli, Costa Capítulo 6 exercícios 16 e 17) Usando a desigualdade de Cauchy Schwartz em $\mathbb{R}^3$ mostre que

1. Dados números reais a_1, a_2 e a_3 estritamente positivos, então a seguinte desigualdade é válida:

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

2. Dados números reais estritamente positivos a, b e c tais que $a + b + c = 1$, então

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

Resolução:
1. Por Cauchy-Schwartz, vemos que
$$\left|\left\langle (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}), \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)\right\rangle\right|^2 \leq \|(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})\|^2 \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)\right\|^2.$$
Logo
$$9 = 3^2 = \left|\left\langle (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}), \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)\right\rangle\right|^2$$
$$\leq \|(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3})\|^2 \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}\right)\right\|^2 \leq (a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right).$$
2. Note que
$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) + 1 = \frac{1}{abc} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 + 1$$
$$= \frac{1}{abc} - \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc} - \frac{a+b+c}{abc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \overset{i}{=} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$
$$\overset{ii}{=} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9.$$
Note que usamos $a + b + c = 1$ acima em i e em ii.