LISTA DE EXERCÍCIOS 2 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados do capítulo 2 do livro do Apostol.

Exercício 1. (Apostol seção 2.4 exercícios 1 a 10) Determine se as funções $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são lineares. Se forem lineares, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.
1. $T(x, y) = (y, x)$
2. $T(x, y) = (x, -y)$
3. $T(x, y) = (x, 0)$
4. $T(x, y) = (x, x)$
5. $T(x, y) = (x^2, y^2)$
6. $T(x, y) = (e^x, e^y)$
7. $T(x, y) = (x, 1)$
8. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$
9. $T(x, y) = (x - y, x + y)$
10. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$

Exercício 2. (Apostol seção 2.4 exercícios 16 a 23) Determine se as funções $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ são lineares. Se forem lineares, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.
1. $T(x, y, z) = (z, y, x)$
2. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$
3. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3x)$
4. $T(x, y, z) = (x, y, 1)$
5. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$
6. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$
7. $T(x, y, z) = (x, y^2, z^2)$
8. $T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$

Exercício 3. (Apostol seção 2.4 exercício 24) Seja $\mathcal{P}_n$ o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n. Seja $T : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ dado por $T(p)(x) = p(x + 1)$. T é linear? Se for, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

Exercício 4. (Apostol seção 2.5 exercício 25) Seja $T : C^1(]-1, 1[) \to C(]-1, 1[)$ dado por $T(f)(x) = x\frac{df}{dx}(x)$. T é linear? Se for, determine seu núcleo, a dimensão do núcleo, sua imagem e a dimensão da imagem.

Exercício 5. (Apostol seção 2.4 exercício 29) Seja $S \subset C([-\pi, \pi])$ o conjunto das funções tais que $f \in S$ se, e somente se,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, sen(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(t)\, dt = 0.$$

1) Mostre que S é um subespaço de $C([-\pi, \pi])$.
2) Mostre que S contém as funções $sen(nx)$ e $cos(nx)$ para todo $n = 2, 3, 4, ...$
3) Mostre que S tem dimensão infinita.
Seja $T : C([-\pi, \pi]) \to C([-\pi, \pi])$ dado por

$$T(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x - t)\} f(t)\, dt$$

4) Mostre que a imagem de T tem dimensão finita. Ache uma base da imagem de T.
5) Determine o núcleo de T.
6) Ache todos os $c \neq 0$ e todos os $f \neq 0$ tais que $T(f) = cf$.

Exercício 6. (Apostol seção 2.4 exercício 30) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que se V tem dimensão infinita, então ou núcleo de T ou a sua imagem tem dimensão infinita.

Resolução: Suponha o núcleo e a imagem de T tenham dimensão finita. Seja $\{e_1, ..., e_k\} \subset V$ uma base de $N(T)$ e $\{f_1, ..., f_l\} \subset V$ um conjunto tal que $\{T(f_1), ..., T(f_l)\}$ seja uma base de $T(V)$.

Seja $v \in V$. Logo $T(v) = \alpha_1 T(f_1) + ... + \alpha_l T(f_l)$, já que $T(v)$ pertence a imagem de T. Assim,

$$T(v - (\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l)) = 0.$$

Portanto, $v - (\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l)$ pertence ao núcleo de T. Logo

$$v - (\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l) = \beta_1 e_1 + ... + \beta_k e_k.$$

Desta maneira,

$$v = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_l f_l + \beta_1 e_1 + ... + \beta_k e_k.$$

Concluímos que $V = L(\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_l\})$, ou seja, é gerado por um conjunto finito. Portanto, tem dimensão finita.

Exercício 7. (Apostol seção 2.8 exercício 21) Seja $T : V \to V$ uma transformação linear. Defina indutivamente $T^1 = T$, $T^{n+1} = T \circ T^n$, $n \geq 1$. Mostre que $T^{n+m} = T^n T^m$ e que se T é invertível, então T^n também é invertível, com $(T^n)^{-1} = T^{-n}$.

Exercício 8. (Apostol seção 2.8 exercício 23) Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to Z$ transformações lineares. Mostre que se S e T são invertíveis, então ST também é invertível e $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Exercício 9. (Apostol seção 2.8 exercício 24) Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ transformações lineares. Mostre que se S e T são invertíveis e $ST = TS$, então $S^{-1}T^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Exercício 10. (Apostol seção 2.8 exercício 25) Sejam $T : V \to V$ e $S : V \to V$ transformações lineares. Mostre que se $TS = ST$, então

$$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2 \quad (S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3.$$

Indique como estas fórmulas devem ser modificadas caso $ST \neq TS$.

Exercício 11. (Apostol seção 2.8 exercício 27) Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial de todos os polinômios reais. Definimos $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ e $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ como $D(p)(x) = \frac{dp}{dx}(x)$ e $T(p)(x) = \int_0^x p(t)\,dt$. Prove que $DT = I$, mas $TD \neq I$, em que I é a identidade. Ache o núcleo e a imagem de TD.

Exercício 12. (Apostol seção 2.8 exercício 31) Seja $\mathcal{P}$ o espaço vetorial de todos os polinômios reais. Definimos R, T e $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ por

$$\begin{gathered} R(p)(x) = p(0) \\ S\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} \\ T\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k+1} \end{gathered}$$

1) Seja $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$ e determine a imagem de p sobre os operadores R, S, T, ST, TS, $(TS)^2$, T^2S^2, S^2T^2, TRS, RST.

2) Prove que R, S e T são lineares e determine o núcleo e a imagem destas transformações lineares.

3) Prove que T é injetor e ache uma transformação linear $Q : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tal que $QT = I$, em que I é a identidade.

4) Se $n \geq 1$, escreva $(TS)^n$ e S^nT^n em função de I e R.

Exercício 13. (Apostol seção 2.12 exercício 1) Seja $\mathbb{R}^n$ com a base canônica. Determine a matriz de cada uma das transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$:

1) T é a identidade.

2) T é a transformação linear nula.

3) T é a multiplicação por um escalar c.

Exercício 14. (Apostol seção 2.12 exercício 2) Seja $\mathbb{R}^n$ com a base canônica. Determine a matriz de cada uma das transformações lineares:

1) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y, z) = (x, y)$.

2) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y, z) = (y, z)$.

3) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z, w, v) = (y, z, w)$.

Resposta:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 2. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 3. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercício 15. (Apostol seção 2.12 exercício 3) Seja $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a transformação linear definida na base canônica $\mathcal{B}=(i,j)$ de $\mathbb{R}^2$ da seguinte forma:

$$T(i)=i+j \quad T(j)=2i-j.$$

1) Calcule $T(3i-4j)$ e $T^2(3i-4j)$ em termos de i e j.
2) Determine a matriz de T e de T^2.
3) Determine a matriz de T e de T^2 em termos da base (e_1,e_2), em que $e_1=i-j$ e $e_2=3i+j$.

Resposta: Vamos fazer 2) inicialmente. Vemos que a matriz A que representa T na base (i,j) é

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \text{ e } A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

1) Notemos que

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 7\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ -12\end{pmatrix}.$$

Logo $T(3i-4j)=-5i+7j$ e $T^2(3i-4j)=9i-12j$.
3) Vemos que $e_1=i-j$ e $e_2=3i+j$. Logo $i=\frac{1}{4}(e_1+e_2)$ e $j=\frac{1}{4}(e_2-3e_1)$

$$T(e_1)=T(i-j)=T(i)-T(j)=(i+j)-(2i-j)=-i+2j=-\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{1}{2}(e_2-3e_1)=-\frac{7}{4}e_1+\frac{1}{4}e_2$$

$$T(e_2)=T(3i+j)=3T(i)+T(j)=3i+3j+2i-j=5i+2j=\frac{5}{4}(e_1+e_2)+\frac{1}{2}(e_2-3e_1)=-\frac{1}{4}e_1+\frac{7}{4}e_2$$

Logo a matriz B que representa T na base (e_1,e_2) é

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\end{pmatrix} \text{ e } A^2=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{7}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Exercício 16. (Apostol seção 2.12 exercício 5) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear definida na base canônica $\mathcal{B}=(i,j,k)$ de $\mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

$$T(k)=2i+3j+5k \quad T(j+k)=i \quad T(i+j+k)=j-k.$$

1) Calcule $T(i+2j+3k)$ e determine a dimensão do núcleo e da imagem de T.
2) Determine a matriz de T em relação a base canônica.

Exercício 17. (Apostol seção 2.12 exercício 10) Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão 2, $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ e $\mathcal{C}=(f_1,f_2)$ bases ordenadas de V e W, respectivamente. Seja $T:V\to W$ uma transformação linear tal que $T(e_1+e_2)=3f_1+9f_2$ e $T(3e_1+2e_2)=7f_1+23f_2$
1) Calcule $T(e_2-e_1)$.
2) Determine as dimensões do núcleo e da imagem de T.
3) Determine a matriz de T em relação às bases dadas.

Exercício 18. (Apostol seção 2.12 exercícios 11 a 18). Considere os espaços vetoriais V gerados pelas funções abaixo. Definamos $D:V\to V$ como $D(f)=\frac{df}{dx}$. Considerando a base como sendo os vetores que geram o espaço V, ache a matriz que representa D e D^2 nos seguintes casos:
1) V é gerado por $\{sen(x), cos(x)\}$.
2) V é gerado por $\{1,x,e^x\}$.
3) V é gerado por $\{1,1+x,1+x+e^x\}$.
4) V é gerado por $\{e^x, xe^x\}$.
5) V é gerado por $\{-cos(x), sen(x)\}$.
6) V é gerado por $\{sen(x), cos(x), xsen(x), xcos(x)\}$.
7) V é gerado por $\{e^x sen(x), e^x cos(x)\}$.
8) V é gerado por $\left\{e^{2x} sen(3x), e^{2x} cos(3x)\right\}$.

Exercício 19. (Apostol seção 2.16 exercício 6) Seja $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Mostre que $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ e calcule A^n.

Exercício 20. (Apostol seção 2.16 exercício 8) Seja $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Mostre que $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Calcule A^3, A^4 e prove por indução uma fórmula geral para A^n.

Exercício 21. (Apostol seção 2.20 exercícios 1 a 8) Ache as soluções (se existirem dos seguintes sistemas)

1) $\begin{cases} x+y+3z=5 \\ 2x-y+4z=11 \\ -y+z=3 \end{cases}$.

2) $\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2y+1z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ 7x+4y+5z=3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+2y+1z=1 \\ 5x+3y+3z=2 \\ 7x+4y+5z=3 \\ 1x+1y-1z=0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y+5z+1u=1 \\ 1x+1y-3z+2u=2 \\ 6x+1y-4z+3u=7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 1x+1y-3z+1u=5 \\ 2x-1y+1z-2u=2 \\ 7x+1y-7z+3u=3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 1x+1y+2z+3u+4v=0 \\ 2x+2y+7z+11u+14v=0 \\ 3x+3y+6z+10u+15v=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 1x-2y+1z+2u=-2 \\ 2x+3y-1z-5u=9 \\ 4x-1y+1z-1u=5 \\ 5x-3y+2z+1u=3 \end{cases}$