

LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Apostol e Domingues/Callioli/Costa.

Exercício 1. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 1, 4, 8) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz cujas linhas são A_1, \dots, A_n . Como em sala de aula denotamos $A = (A_1, \dots, A_n)$. Usando a linearidade em cada uma das linhas (n-linearidade do determinante) e a propriedade do determinante de ser alternado (igual a zero, se duas linhas forem iguais)

a) Prove que se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, então $\det(\lambda_1 A, \dots, \lambda_n A) = \lambda_1 \dots \lambda_n \det(A_1, \dots, A_n)$.

b) Prove que $\det(A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_3, \dots, A_1 + A_n) = \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$.

c) Prove que se $n = 3$, então $\det(A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_1 - A_3, A_3 - A_1 - A_2) = -4 \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$.

Exercício 2. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 6) Seja $A = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (b \ b \ \dots \ b) \in M_n(\mathbb{R})$. Quanto

é $\det(A)$?

Resolução: Vemos que

$$A = \begin{pmatrix} ab & \dots & ab \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ab & \dots & ab \end{pmatrix}.$$

Logo as linhas são L.D. Portanto $\det(A) = 0$.

Exercício 3. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 5) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $A + A^t = 0$. Mostre que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Que acontece se n é ímpar?

Resolução: Observamos que $A = -A^t$ implica que $\det(A) = \det(-A^t) = \det((-A)^t) = \det(-A)$. Mas

$$\det(-A) = \det(-A_1, -A_2, \dots, -A_n) = -\det(A_1, -A_2, -A_3, \dots, -A_n) = (-1)^2 \det(A_1, A_2, -A_3, \dots, -A_n)$$

$$(-1)^3 \det(A_1, A_2, A_3, \dots, -A_n) = \dots = (-1)^n \det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = (-1)^n \det(A).$$

Se n é ímpar, concluímos que $\det(A) = -\det(A)$. Logo $\det(A) = 0$.

Exercício 4. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 2, capítulo 7.4, exercícios 2 e 4) Calcule o determinante das matrizes:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{pmatrix}.$$

Note que usando o que foi visto em sala de aula, o determinante das matrizes de b e c podem ser calculados com muito poucas contas.

Exercício 5. (Apostol, seção 3.6, exercício 3)

a) Prove que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b) Ache as fórmulas correspondentes para os determinantes abaixo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \text{ e } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6. (Apostol, seção 3.6, exercício 6)

Sejam $f_1, f_2, g_1, g_2 :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Prove que

$$\frac{d}{dx} \left(\det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx}(x) & \frac{df_2}{dx}(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{dg_1}{dx}(x) & \frac{dg_2}{dx}(x) \end{pmatrix}.$$

Qual seria a generalização deste resultado para matrizes $n \times n$? Tente generalizar.

Exercício 7. (Apostol, seção 3.6, exercício 5 e 6)

a) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$. Mostre que $\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} g & h \\ z & w \end{pmatrix}$.

b) Enuncie e demonstre uma generalização para matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

em que $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.