DICAS E RESPOSTAS LISTA 2:

Exercício 1. a) Não existe elemento neutro. Por exemplo, não existe nenhum elemento (x, y) tal que $(x, y) + (1, 1) = (1, 1)$.
b) $1.(x, y)$ nem sempre é igual a (x, y), por exemplo $1.(1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1)$
c) Não vale sempre $(\alpha+\beta).(x, y) = \alpha.(x, y)+\beta.(x, y)$. Por exemplo, $0.(1, 1) = (1, 0)$, mas $0.(1, 1)+0.(1, 1) = (2, 0)$.
d) A soma não é comutativa.
e) $1.(x, y)$ nem sempre é (x, y).

Exercício 2. As propriedades da adição são satisfeitas. Para as propriedades da multiplicação por um escalar, basta notar que se elas valem para complexos, então valem para os reais (já que estão contidos nos complexos). Assim, por exemplo, se $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$, para quaisquer α e β em $\mathbb{C}$, então esta mesma relação deve valer para quaisquer α e β em $\mathbb{R}$, já que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Exercício 3. a) Sim.
b) Não, pois $(1, 0, 0) \in W$, mas $\frac{1}{2}(1, 0, 0) = (\frac{1}{2}, 0, 0) \notin W$, pois $\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.
c) Não, pois $0 \notin W$, já que $grau(0) = 0$.
d) Sim.
e) Não, pois 0 vezes qualquer matriz inversível é 0, que não é inversível.
f) Sim.

Exercício 4. Para ver que dois conjuntos são iguais, mostre que um está contido no outro. Assim no item a) mostre que se $w \in U + V$, então $w \in V$, ou seja, $U + V \subset V$. Depois mostre que se $w \in V$, então $w \in U + V$. Por exemplo, se $v \in V$ então $v = 0 + v$. Como $v \in V$ e $0 \in U$, concluímos que $v \in U + V$.

Exercício 5. a) Sim.
b) Não
c) O conjunto é L.I. para todos os $m \neq 5$.
Dica: Para verificar que é L.D. ou L.I., verifique se um vetor é combinação linear dos outros ou use a definição diretamente. Por exemplo, no exercício a) verifique que $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$ é L.I. mostrando que $\alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(1, 0, 1) + \alpha_3(1, 0, -2) = 0$ se, e somente se, α_1, α_2 e α_3 resolvem o sistema abaixo:

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{gathered}$$

Escalone para ver que este sistema só tem solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Exercício 6. Escalone os sistemas para achar as soluções gerais. Você irá concluir que as respostas são:
a) Dimensão é 3 e uma base é $\{(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0, 0)\}$.
b) Dimensão é 2 e uma base é $\{(-\frac{5}{7}, \frac{9}{7}, 1, 0), (\frac{2}{7}, -\frac{5}{7}, 0, 1)\}$.

Exercício 7.
Mostre que o conjunto é L.I. Como ele tem 4 elementos e $dim(P_3(\mathbb{F})) = 4$ isto implica que o conjunto é uma base.

Exercício 8. $dim(U) = 2$, $dim(V) = 2$, $dim(U + V) = 3$. Uma base para U é $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Uma base para V é $\{(1, 2, 0), (3, 1, 2)\}$. Uma base para $U + V$ é $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Uma base para $U \cap V$ é $\{(0, -5, 2)\}$.

Exercício 9. a)

$$I_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_{BC} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) $(-2, 0, 1)$.

Exercício 10. a) Dica: Mostre que se $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$, então $\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \alpha_3 f_3'(x) = 0$ e $\alpha_1 f_1''(x) + \alpha_2 f_2''(x) + \alpha_3 f_3''(x) = 0$. Mostre que para $x = 0$ estas 3 equações implicam que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por escalonamento.

b)

$$\begin{gathered} g_1 = f_1 \\ g_2 = \tfrac{1}{2} f_2 + \tfrac{1}{2} f_3 \\ g_3 = \tfrac{1}{2i} f_2 - \tfrac{1}{2i} f_3 \end{gathered}$$

c)

$$I_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix}$$

As coordenadas do vetor são $(0, 1, 0)$.