DICAS E RESPOSTAS LISTA 3:

Exercício 1. a) Não, pois $F(0) = (0,2) \neq (0,0)$ e toda transformação linear leva vetor nulo em vetor nulo. Podemos ver também que $F(1) + F(1) = (1,2) + (1,2) = (2,4) \neq (2,2) = F(2)$.

b) Sim.

c) Sim.

d) Não, novamente a forma mais fácil de ver isto é notando que $F(0,0,0,0) = (1,0,0,0) \neq (0,0,0,0)$.

e) Sim.

f) Sim.

g) Sim.

Exercício 2.

a) Uma base para a imagem é $\{1\}$ e sua dimensão é 1. Uma base para o núcleo é $\{(-1,1,0),(1,0,1)\}$ e sua dimensão é 2.

b) Uma base para a imagem é $\{(2,1),(0,1)\}$ ou simplesmente a base canônica. A dimensão da imagem é 2. Uma base para o núcleo é $\emptyset$ e sua dimensão é 0.

c) Uma base para a imagem é $\{(1,1,0),(1,-1,1)\}$ e sua dimensão é 2. Uma base para o núcleo é $\emptyset$ e sua dimensão é 0.

d) Uma base para a imagem é $\{t^2\}$ e sua dimensão é 1. Uma base para o núcleo é $\{1,t\}$ e sua dimensão é 2.

e) Uma base para a imagem é $\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ ou simplesmente sua base canônica e sua dimensão é 4. Uma base para o núcleo é $\emptyset$ e sua dimensão é 0.

Exercício 3.

a) Use a relação $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$ e note que $\dim(\mathrm{Im}(F))$ é 0 ou 1, pois $\mathrm{Im}(F) \subset \mathbb{R}$.

b) Use que se F e G são L.D. e não nulos, então existe $\alpha \in \mathbb{F}$ não nulo tal que $F = \alpha G$.

Exercício 4.

a) Para ver que é injetora, prove que se $T(x_1, x_2, ...) = 0$ então $(x_1, x_2, ...) = (0, 0, ...)$. Para ver que não é sobrejetora, note que $(1,0,0,...) \notin Im(T)$.

b) Para ver que T é sobrejetora, note que $(x_1, x_2, ...) = T(0, x_1, x_2, ...)$. Para ver que não é injetora, note que $T(1,0,0,...) = (0,0,...)$.

c) Defina $T(a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n) = (a_{0,} a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$.

Exercício 5.

a) De fato $F(v - F(v)) = F(v) - F(F(v)) = F(v) - F(v) = 0$.

c) Se $w \in Ker(F) \cap Im(F)$, então $w = F(v)$, pois $w \in Im(F)$. Mas $F(w) = 0$, pois $w \in Ker(F)$. Logo $0 = F(w) = F(F(v)) = F(v) = w$, ou seja, $w = 0$.

Exercício 6.

$$F_{BC} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{-1}{11} & \frac{9}{11} \\ \\ \frac{10}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}.$$

Exercício 7.

Para mostrar que é injetora note que se $F(X) = UXU^{-1} = 0$, então posso multiplicar a esquerda por U^{-1} e a direita por U e concluo que $X = 0$. Para mostrar que é sobrejetor, mostro que se $B \in M_n(\mathbb{F})$, então $F(U^{-1}BU) = U(U^{-1}BU)U^{-1} = B$, ou seja, $B \in Im(F)$.

Exercício 8.

a) $F_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $I_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e $I_{BC} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

c) $F_C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d) As coordenadas são $(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$.

Exercício 9.

A máxima dimensão que a imagem de $G \circ F$ poderá ter é m. Se eu pensar na matriz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ como uma transformação linear de $\mathbb{F}^m$ em $\mathbb{F}^n$ e na matriz $B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ como uma transformação linear de $\mathbb{F}^n$ em $\mathbb{F}^m$, então a matriz AB será a matriz da transformação linear composta $A \circ B : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, cuja imagem tem dimensão no máximo $m < n$. Logo não é sobrejetora. Assim AB não é bijeção e, portanto, a matriz não é inversível.

Exercício 10.

i) a) A base dual é (f_1, f_2, f_3), em que $f_1(x, y, z) = \frac{1}{2}z$, $f_2(x, y, z) = -2x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}z$, $f_3(x, y, z) = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z$.

b) A base dual é (f_1, f_2, f_3), em que $f_1(x + yt + zt^2) = x + z$, $f_2(x + yt + zt^2) = y$, $f_3(x + yt + zt^2) = -z$.

ii) As coordenadas são $(1, 1, 3)$.