DICAS E RESPOSTAS LISTA 4:

Exercício 1.

a) e b) são apenas verificações dos axiomas que definem produto interno.

c) A única parte mais complicada é checar que $\langle u,u\rangle_T = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Mas isso de fato ocorre, pois $\langle u,u\rangle_T = 0$ equivale a $\langle T(u),T(u)\rangle = 0$ e isto equivale a $T(u) = 0$. Como T é injetora, isso é verdadeiro se, e somente se, $u = 0$.

d) Se $V \neq \{o\}$, então para todo $u \in V$ tal que $u \neq o$, $\langle u,u\rangle_3$ deveria ser estritamente maior do que 0. Portanto $\langle , \rangle_3$ não é um produto interno. Se $V = \{o\}$, este problema não ocorre. É o único caso em que $\langle , \rangle_3$ é um produto interno. (A pergunta está mal formulada, pois não levou em conta este caso...)

e) Se formassem um espaço vetorial, então 0 vezes um produto escalar, deveria ser um produto interno. Como vimos no item d isto é falso, se $V \neq \{o\}$. Se $V = \{o\}$, esse problema não ocorre e então temos um subespaço vetorial. (Novamente a pergunta original não levou em conta este caso...)

Exercício 2.

a) Se $\langle F(u),v\rangle = 0$ para todo u e $v \in V$, então em particular para $v = F(u)$ temos $\langle F(u),F(u)\rangle = 0$. Logo $F(u) = o$ para todo $u \in V$.

b) Apenas uma verificação.

c) De fato basta resolver o sistema

$$\begin{cases} \langle F(v),u\rangle + \langle F(u),v\rangle = 0 \\ -i\langle F(v),u\rangle + i\langle F(u),v\rangle = 0 \end{cases}.$$

d) Apenas uma verificação.

e) Para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\langle (F-G)(u),u\rangle = 0$ implica que $F - G = 0$ e, portanto, $F = G$. Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ vimos que a aplicação do item d é tal que $\langle F(u),u\rangle = 0$ para todo $u \in V$. Logo $\langle F(u),u\rangle = \langle O(u),u\rangle$, em que O é a aplicação nula. No entanto $F \neq O$.

Exercício 3.

a) $\|u\| = 2$ e $\|v\| = \sqrt{2}$. $d(u,v) = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$.

b) $\|u\| = \sqrt{\frac{41}{30}}$ e $\|v\| = \frac{3}{\sqrt{5}}$. $d(u,v) = \sqrt{\frac{13}{15}}$ e $cos(\theta) = \frac{23}{2\sqrt{246}}$.

c) $\|u\| = \sqrt{2}$ e $\|v\| = \sqrt{2}$. $d(u,v) = \sqrt{2}$ e $cos(\theta) = \frac{1}{2}$, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercício 4.

a) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{1}{\sqrt{18}},\frac{4}{\sqrt{18}},0\right),\left(\frac{2}{\sqrt{153}},\frac{-2}{\sqrt{153}},\frac{1}{\sqrt{153}},\frac{12}{\sqrt{153}}\right)\right\}$.

b) $\left\{(1,0,0,0),\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$.

Exercício 5.

a) $\left\{1, 2\sqrt{3}t - \sqrt{3}, \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\right\}$.

b) $\left\{-\frac{b}{6}t^2 + bt - b;\ b \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercício 6.

a) Basta achar uma base e a dimensão do conjunto solução do sistema linear homogêneo abaixo

$$\begin{cases} x - y - z \quad = 0 \\ \qquad z - 2t = 0 \end{cases}$$

Escalonando obtemos $\{(1,1,0,0),(2,0,2,1\}$. A dimensão de W é 2.

b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right),\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$.

c) $E(u) = \left\langle u,\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0\right) + \left\langle u,\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\rangle\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

d) $\left(\frac{6}{7},\frac{8}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$.

Exercício 7.

a) Para a composição temos $\|S(T(u))\| = \|T(u)\| = \|u\|$. Para a inversa, consideremos $u \in V$. Logo existe um único $v \in V$ tal que $T(v) = u$. Assim$\|T^{-1}(u)\| = \|v\| = \|T(v)\| = \|u\|$.

b) Basta ver que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\|T(v)\|}.$$

c) Basta notar que $Tr(AM(BM)^*) = Tr(AMM^*B^*) = Tr(AB^*)$.

Exercício 8.

a) Linearidade é só verificar. Para verificar que é auto adjunta basta ver que

$$\langle A(h_1 + t_1), h_2 + t_2\rangle = \langle h_1 - t_1, h_2 + t_2\rangle = \langle h_1, h_2\rangle - \langle t_1, t_2\rangle = \langle h_1 + t_1, h_2 - t_2\rangle = \langle h_1 + t_1, A(h_2 + t_2)\rangle .$$

b) Considero a base ortonormal $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)\right\}$. Vemos que $H = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]$. Escrevendo os vetores da base canônica nesta base, vemos que

$$(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$(0,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

$$(0,0,1) = (0,0,1).$$

Assim fica mais simples de calcular a aplicação F sobre os termos da base canônica. Por exemplo $F(1,0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (0,1,0)$. A matriz de F é, então:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 9.

Use que se $T(u_1) = u$ e $T(v_1) = v$, então

$$\left\langle T^{-1}(u), v\right\rangle = \left\langle T^{-1}(T(u_1)), T(v_1)\right\rangle = \langle u_1, T(v_1)\rangle = \langle T(u_1), v_1\rangle = \langle u, v_1\rangle = \left\langle u, T^{-1}(v)\right\rangle .$$

Exercício 10.

a) Apenas verificação.

b) Devemos mostrar que é linear e bijetora. Como a dimensão do espaço dual V^* é a mesma da do espaço V, basta mostrar que é injetora. De fato se $f_v = 0$, então $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $u \in V$. Logo $v = 0$.