DICAS E RESPOSTAS LISTA 5:

Exercício 1.

a) Basta usar a n-linearidade. $\det(\lambda_1 A_1, ..., \lambda_n A_n) = \lambda_1 \det(A_1, \lambda_2 A_2, ..., \lambda_n A_n) = \lambda_1\lambda_2 \det(A_1, A_2, \lambda_3 A_3 ..., \lambda_n A_n) = ... = \lambda_1 ... \lambda_n \det(A_1, ..., A_n)$.

b) Usamos que determinante é uma função n-linear alternada: $\det(A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n) = \det(A_1, A_1, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n) + \det(A_1, A_2, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n) = \det(A_1, A_2, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n)$ e seguimos até chegar o resultado. Na primeira igualdade usei $n-$linearidade e na segunda que o determinante é alternado.

c) Novamente uso $n-$linearidade e o fato que permutações de linhas mudam o sinal do determinante. Assim, por exemplo, $\det(A_1, A_3, A_2) = -\det(A_1, A_2, A_3)$.

Exercício 2.

O determinante é zero, pois a matriz tem linhas iguais. De fato

$$A = \begin{pmatrix} ab & \dots & ab \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ab & \dots & ab \end{pmatrix}.$$

Exercício 3.

De fato $A = -A^t$. Logo $\det(A) = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A^t) = (-1)^n \det(A)$. Usamos que $\det(A^t) = \det(A)$ e que $\det(-A_1, ..., -A_n) = (-1)^n \det(-A_1, ..., -A_n)$, pelo exercício 1 a). Se n é ímpar, então $\det(A) = 0$.

Exercício 4.

a) $F_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e o determinante é 3.

b) Em qualquer base B a matriz é $H_{\lambda B} = \begin{pmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ e o determinante é λ^n.

c) $F_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e o determinante de F é 6 e o de F^2 é 36.

d) $\det(F)^2 = \det(F)$. Logo $\det(F)$ é 0 ou 1.

e) $\det(F_B) = 0$, pois F não é um isomorfismo. De fato $F_B(I_n) = I_n B - B I_n = B - B = 0$. Logo F_B não é injetora.

Exercício 5

a) 35

b) -8. É a multiplicação dos termos da diagonal.

c) 0, pois o determinante é o mesmo de sua transposta e a transposta tem a segunda linha como um múltiplo da primeira. Logo as linhas são $L.D.$ e o determinante é zero.

Exercício 6.

a) $\sqrt{2}$ e o auto-vetor correspondente é $\left(1, \sqrt{2} - 1\right)$. $-\sqrt{2}$ e o auto-vetor correspondente é $\left(-1, \sqrt{2} + 1\right)$.

b) -1 é auto-valor e qualquer vetor não nulo é auto-vetor.

c) Não há auto-valores nem auto-vetores reais.

d) Auto-valor 2 e auto-vetor $(1, 0, 0)$, auto-valor 3 e auto-vetor $(5, 1, 1)$, auto-valor -1 e auto-vetor $(1, 3, -3)$.

e) Auto-valor 0 (duplo) e auto-vetores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Auto-valor 2 e auto-vetor $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.

Note que a escolha dos auto-vetores não é única, pois um múltiplo (diferente de 0) de um auto-vetor também é um auto-vetor e combinações lineares de auto-vetores com o mesmo auto-valor também é um auto-vetor.

Exercício 7.
$p_A(t) = (t-2)^3(t-3)$ e os auto-valores são 2 (com 2 auto-vetores) e 3.

Exercício 8.
a) Seja λ um auto-valor e u um auto-vetor correspondente. Logo $\langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle$ implica que $\lambda \langle u, u\rangle = \langle Au, u\rangle = \langle u, Au\rangle = \overline{\lambda} \langle u, u\rangle$. Como $u \neq 0$, concluímos que $\lambda = \overline{\lambda}$, portanto $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Seja λ um auto-valor e u um auto-vetor correspondente. Logo $\langle Au, Au\rangle = \langle u, u\rangle$ implica que $|\lambda|^2 \langle u, u\rangle = \langle u, u\rangle$. Como $u \neq 0$, concluímos que $|\lambda| = 1$.
c) Usamos que $T^n(u) = T^{n-1}(T(u)) = \lambda T^{n-1}(u) = ... = \lambda^n T(u)$. Para $p(T)$ usamos o mesmo raciocínio.

Exercício 9.
a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Não existe.
c) $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício 10.
a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
b) $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}} \end{pmatrix}$ é semelhante a A.