LISTA DE EXERCÍCIOS EDP

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/EDP

Abaixo, selecionamos alguns exercícios interessantes do Folland. Eles devem ser feitos como complemento aos exercícios dos capítulos 1 e 2 do Evans.

1. Exercício (2.A.1) (Recordamos aqui as definições de multi-índice que aprendemos no dia 07 de agosto)

Seja um operador diferencial $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha$, em que $a_\alpha \in C(\mathbb{R}^n)$. Suponha que para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixo, temos

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha u(x+x_0) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x+x_0)\partial_x^\alpha u(x+x_0),\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

ou seja, $P(x,D)$ comuta com todas as translações. Prove que as funções a_α são constantes.

Dica: Considere funções $u(x) = x^\beta$, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, e note que

$$\partial^\alpha\left(x^\beta\right) = \begin{cases} \frac{\beta!}{\alpha!}x^{\beta-\alpha},\ \alpha\leq\beta \\ 0,\ \alpha\nleq\beta \end{cases}.$$

2. Exercício (2.B.1) (O exercício mostra uma versão complexa do teorema do máximo visto no dia 14 de agosto)

Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto limitado. Se $u:\overline{U}\to\mathbb{C}$ é uma função contínua, de classe C^2 no interior de U e tal que $\Delta u(x) = 0$ para todo $x\in U$, então prove que $\max_{\overline{U}}|u| = \max_{\partial U}|u|$.

Dica: Se $x_0\in\overline{U}$ é tal que $|u(x_0)| = \max_{\overline{U}}|u|$, então existe $\theta\in[0,2\pi[$ tal que $u(x_0) = Me^{i\theta}$, $M = |u(x_0)|$. Considere, então, a função harmônica com valores reais $v(x) = \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}u(x)\right)$.

3. Exercício (2.B.2) (O exercício mostra outra maneira de se provar a volta do princípio do valor médio de funções harmônicas vista no dia 14 de agosto)

Seja $u\in C^2(U)$, $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e $x\in U$. Mostre que

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to0^+}\frac{2n}{r^2}\left[\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} u(x+ry)\,dS(y) - u(x)\right].$$

Conclua que se

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS(y),\ \forall\overline{B(x,r)}\subset U,$$

então u é harmônica.

Dica: Use a fórmula de Taylor de grau 2 em r e observe que, por simetria, $\int_{S^{n-1}} y_j dS(y) = \int_{S^{n-1}} y_jy_k dS(y) = 0$, se $j\neq k$, e que $\int_{S^{n-1}} y_k^2 dS(y) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\sum_{j=1}^n y_j^2 dS(y) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} 1 dS(y))$

4. Exercício (2.B.3) (O exercício estende o teorema do máximo visto no dia 14 de agosto)

Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ um aberto e limitado. Todas as funções abaixo tem valores reais. Seja

$$L = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

em que a_{jk}e b_j são funções contínuas em $\overline{U}$. Suponha que (a_{jk}) seja uma matriz auto-adjunta positiva: $a_{jk} = a_{kj}$ e $\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n a_{jk}(x)\xi_j\xi_k > a_0|\xi|^2$, para algum $a_0>0$ e todo $\xi = (\xi_1,...,\xi_n)\neq0$.

a) Mostre que se $v\in C^2(U)$ e $Lv(x)>0$ para todo $x\in U$, então v não tem máximo local em U.

Dica: Lembre-se (veja no livro do Elon de análise real volume 2, cinza) que se uma função C^2 tem máximo local em $x_0\in U$, então $\nabla v(x_0) = 0$ e a matriz Hessiana $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\right)_{ij}$ é não positiva. Lembre-se também que toda matriz auto-adjunta é diagonalizável.

b) Seja $w(x) = e^{-M|x-x_0|^2}$, em que $x_0\notin\overline{U}$. Mostre que se M for suficientemente grande, então $Lw(x)>0$ para todo $x\in\overline{U}$.

c) Prove que se $u\in C^2(U)\cap C\left(\overline{U}\right)$ e $Lu(x) = 0$, para todo $x\in U$, então $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$.

Dica: Mostre que isso é verdade para a função $v = u+\epsilon w$, para qualquer $\epsilon>0$, em que w é a função do item b.

5. Exercício (2.C.2) (O exercício estuda a solução fundamental, tal como visto no dia 21 de agosto, no caso em que estamos em $\mathbb{R}^1$)

Sabemos que para $n \geq 3$, a função $\Phi(x) = \frac{|x|^{2-n}}{(n-2)n|B(0,1)|}$ é a solução fundamental canônica de $-\Delta$. Note que para $n = 1$, temos $\Phi(x) = -\frac{|x|}{2}$. Esta é a chamada solução fundamental canônica em $\mathbb{R}^1$.

a) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) \frac{d^2 f}{dx^2}(x)\, dx = -f(0)$, para toda função $f \in C_c^2(\mathbb{R})$. (Interpretamos isso como $-\frac{d^2}{dx^2}\Phi = \delta$).

b) Conclua que $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y) f(y)\, dy$ é a única solução limitada (módulo constantes) da equação $-\frac{d^2 u}{dx^2}(x) = f(x)$, $f \in C_c^2(\mathbb{R})$

6. Exercício (2.E.2) (O exercício estuda a função de Green, definida no dia 28 de agosto, no caso $\mathbb{R}^1$)

Mostre que a função de Green para $-\frac{d^2}{dx^2}$ em $]0,1[$ é dada por

$$G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x < y \\ y(1-x), & x > y \end{cases}.$$

Dica: Resolva

$$\begin{cases} \Delta \phi^x(y) = 0, & y \in U \\ \phi^x(y) = \Phi(y-x), & y \in \partial U \end{cases},$$

para o caso $U =]0,1[$ e aplique a definição de função de Green dada em sala de aula. Note que Φ é dado pelo Exercício (2.C.2).

7. Exercício (2.H.1) (O exercício apresenta o núcleo de Poisson, visto no dia 28 de agosto, de uma bola arbitrária).

Mostre que o núcleo de Poisson para a bola $B(x_0, R) \subset \mathbb{R}^n$ é dada por

$$P(x,y) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{|S^{n-1}|\, R\, |x-y|^n}$$

Dica: A função acima pode ser obtida através do núcleo de Poisson em $B(0,1)$ e uma mudança de coordenadas.

8. Exercício (2.H.3) (Abaixo provamos uma versão da Desigualdade de Harnack, vista no dia 21 de agosto, na bola)

Seja $u \in C\left(\overline{B(x_0,R)}\right) \cap C^2(B(x_0,R))$, $u \geq 0$ e $\Delta u(x) = 0$, para todo $x \in B(x_0,R)$. Mostre que se $|x - x_0| = r < R$, então

$$\frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)}{\left[1+\left(\frac{r}{R}\right)\right]^{n-1}} u(x_0) \leq u(x) \leq \frac{1+\left(\frac{r}{R}\right)}{\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]^{n-1}} u(x_0).$$

Dica: Estime o núcleo de Poisson.

9. Exercício (O exercício abaixo já estava no site, para dia 9 de agosto)

Considere $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1.

i) Sejam u e $v : U \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^2\left(\overline{U}\right)$. Prove que

$$\nabla.(v\nabla u) = \nabla v. \nabla u + v \Delta u.$$

ii) Mostre, usando o teorema da divergência, que

$$\int_{\partial U} v(x) \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, dS(x) = \int_U \nabla v(x). \nabla u(x)\, dx + \int_U v(x) \Delta u(x)\, dx,$$

em que n é a normal que aponta para fora de U.

iii) Conclua que se $u : U \to \mathbb{R}$ é de classe $C^2\left(\overline{U}\right)$ e é solução de

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in U \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), & x \in \partial U \end{cases},$$

em que f e g são contínuas, então

$$\int_{\partial U} g(x)\, dS(x) = \int_U f(x)\, dx.$$

10. Exercício (2.A.2)

Seja $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz na base canônica é dada por $\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \operatorname{senh}(\theta) \\ \operatorname{senh}(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$. Mostre que se $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, então

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u(T_\theta(x,y))) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(T_\theta(x,y)).$$

Note que $T_\theta(x,y) = (\cosh(\theta)\,x + \operatorname{senh}(\theta)\,y, \operatorname{senh}(\theta)\,x + \cosh(\theta)\,y)$. Acima, $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(u(T_\theta(x,y)))$ é o operador $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ agindo na função $(x,y) \mapsto u(T_\theta(x,y))$ e $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(T_\theta(x,y))$ é a função $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ no ponto $T_\theta(x,y)$.

11. Exercício (2.B.4)

Seja L como no exercício 4 e $Mu = Lu + c(x)\,u$ em que c é contínuo e não positivo em $\overline{U}$.

a. Assuma que $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$. Modificando o argumento do exercício 4, mostre que se $u \geq 0$ e $Mu = 0$ em U, então $\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u$.

b. Mostre que o teorema de unicidade vale para M: Se u_1 e u_2 são soluções de $Mu = 0$ em U e $u_1 = u_2$ em ∂U, então $u_1 = u_2$ em U. (Dica; Considere $U' = \{x \in U : u_1 - u_2 > 0\}$)

c. Mostre que essa conclusão falha se $c > 0$. (Dica: Considere o caso do laplaciano unidimensional).

12. Exercício (4.A.2)

Sejam $u_1, ..., u_n : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ soluções da equação de onda unidimensional $\frac{\partial u_j}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}$. Mostre que $v : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ dado por

$$v(x_1, ..., x_n, t) = u_1(x_1,t)\,u_2(x_2,t)\,...u_n(x_n,t)$$

é solução da equação de onda $\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v$.

13. Exercício (4.A.4)

Resolva a equação do calor unidimensional na semireta

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & x > 0,\, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x > 0 \end{cases}.$$

Considere como condições de contorno os seguintes casos abaixo:

a) $u(0,t) = 0$

b) $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$

(Dica: Para cada caso, use extensão ímpar ou par de f em $\mathbb{R}$).

14. Exercício (4.C.3)

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado de classe C^1, $T > 0$ e $u \in C_1^2(U_T) \cap C^1(\overline{U_T})$ uma solução da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \Delta u(x,t),$$

para todo $(x,t) \in U_T$. Suponha que $u$satisfaça ou a condição de Dirichlet ou a de Neumann, isto é, $u(x,t) = 0$ ou $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0$ para $(x,t) \in \partial U \times]0,T[$. Mostre que $t \in]0,T[\mapsto \int_U u(t,x)^2\,dx$ é uma função decrescente de t.

(Dica: Observe que $u\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2\right) - \nabla.(u\nabla u) + |\nabla u|^2$ e integre sobre U).

15. Exercício (5.A.2)

Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ uma solução da equação de onda. Suponha que para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, a função $x \in \mathbb{R}^n \mapsto u(x,t_0)$ tenha suporte compacto. Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, a função $x \in \mathbb{R}^n \mapsto u(x,t)$ tem suporte compacto. Mostre que $E = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_{x,t} u|^2\,dx$ independe de t. (Dica: Veja demonstração do Teorema 5.3 da página 163 do Folland)

16. Exercício (5.B.2)

A equação diferencial

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (n-1)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

é a equação $n-$dimensional para a equação de onda radial. Considere $n = 3$.

a. Mostre que a solução geral da equação de onda radial em 3 dimensões é

$$u(x,t) = \frac{1}{r}\left(\phi(r+t) + \psi(r-t)\right),$$

$r = |x|$, em que ϕ e ψ são funções com valores em $\mathbb{R}$.

b. Resolva o problema de Cauchy com condição inicial radial ($n = 3$),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,\ \ u(x,0) = f(|x|),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(|x|)$$

usando o conhecimento sobre soluções da equação de onda em $\mathbb{R}_+$.

c. Sejam u, f e g como na parte b. Mostre que $u(0,t) = f(t) + tf'(t) + tg(t)$. Conclua que u não pode ser melhor do que C^k, se f é C^{k+1} e g é C^k.

17. Exercício (5.E.1)

Seja U um aberto limitado conexo C^1 em $\mathbb{R}^n$. Suponha que u é uma função C^2 que satisfaz $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ em U_T, $T > 0$, e que u satisfaz a condição de Dirichlet $u(x,t) = 0$, $x \in \partial U$, ou a condição de Neumann $\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) = 0$, $x \in \partial U$ para todo $t \in]0,T]$. Mostre que $E = \int_\Omega |\nabla_{x,t} u|^2\,dx$ independe de t. Conclua que se $u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, então $u \equiv 0$.