LISTA DE EXERCÍCIOS 3 - MATEMÁTICA 3 (CCM0213)

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA3

Os exercícios a seguir foram selecionados ou adaptados dos livros do Apostol e Domingues/Callioli/Costa.

Exercício 1. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 1, 4, 8) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz cujas linhas são A_1, ..., A_n. Como em sala de aula denotamos $A = (A_1, ..., A_n)$. Usando a linearidade em cada uma das linhas (n-linearidade do determinante) e a propriedade do determinante de ser alternado (igual a zero, se duas linhas forem iguais)

a) Prove que se λ_1, ..., $\lambda_n \in \mathbb{F}$, então $\det(\lambda_1 A, ..., \lambda_n A) = \lambda_1 ... \lambda_n \det(A_1, ..., A_n)$.

b) Prove que $\det(A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_3, ..., A_1 + A_n) = \det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.

c) Prove que se $n = 3$, então $\det(A_1 - A_2 - A_3, A_2 - A_1 - A_3, A_3 - A_1 - A_2) = -4\det(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$.

Exercício 2. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 6) Seja $A = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} (b\ b\ \ldots b) \in M_n(\mathbb{R})$. Quanto é $\det(A)$?

Exercício 3. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 5) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $A + A^t = 0$. Mostre que $\det(A) = (-1)^n \det(A)$. Que acontece se n é impar?

Exercício 4. (Domingues/Callioli/Costa, capítulo 7.3, exercícios 2, capítulo 7.4, exercícios 2 e 4) Calcule o determinante das matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & x \\ 1 & -2 & y \\ 2 & -4 & z \end{pmatrix}$.

Note que usando o que foi visto em sala de aula, o determinante das matrizes de b e c podem ser calculados com muito poucas contas.

Exercício 5. (Apostol, seção 3.6, exercício 3)

a) Prove que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b) Ache as fórmulas correspondentes para os determinantes abaixo:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix} \text{ e } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 6. (Apostol, seção 3.6, exercício 6)

Sejam $f_1 . f_2 . g_1 . g_2 :]a, b[\to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis. Prove que

$$\frac{d}{dx}\left(\det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx}(x) & \frac{df_2}{dx}(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ \frac{dg_1}{dx}(x) & \frac{dg_2}{dx}(x) \end{pmatrix}.$$

Qual seria a generalização deste resultado para matrizes $n \times n$? Tente generalizar.

Exercício 7. (Apostol, seção 3.6, exercício 5 e 6)

a) Seja $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{pmatrix}$. Mostre que $\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} g & h \\ z & w \end{pmatrix}$.

b) Enuncie e demonstre uma generalização para matrizes da forma

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

em que $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.