Exercício para entregar 2 - Matemática 4

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/~pplopes/matematica42019

18 de maio de 2019

O objetivo do exercício é aplicar o Teorema de Green para o estudo de equações diferenciais ordinárias.

A ideia e alguns itens do exercício foram retirados de

C. I. Doering e A. O. Lopes, Equações Diferenciais Ordinárias, Coleção Matemática Universitária, 2016.

Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma função de classe C^1 dada por $f(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$(EDO)\begin{cases} x'(t)=f_1(x(t),y(t)) \\ y'(t)=f_2(x(t),y(t)) \end{cases}.$$

Dizemos que uma curva $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ de classe C^1 é uma solução da EDO acima se $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, em que x e y satisfazem as equações acima.

Dizemos que uma solução $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ da EDO é uma solução periódica, se α for uma curva simples e fechada (curva de Jordan). Em particular, temos $\alpha(a)=\alpha(b)$. Lembramos que, pelo Teorema da curva de Jordan, sabemos que o conjunto $\mathbb{R}^2\backslash Imagem(\alpha)$ é a união de dois abertos conexos: um limitado, chamado de interior da curva, e um ilimitado, chamado de exterior da curva.

1) Suponha que exista uma solução periódica da EDO dada por $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$. Seja R o interior dessa curva. Mostre que

$$\int\int_R\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\right)dxdy=0.$$

(Dica: Use o Teorema de Green para escrever a equação acima como uma integral de linha sobre α. Use a EDO para mostrar que essa integral de linha se anula).

2) Conclua que no interior da solução periódica, o divergente $\nabla.f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definido como

$$\nabla.f(x,y):=\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y),$$

ou é zero em todo os pontos ou muda de sinal, ou seja, possui pontos em que é positivo e outros em que é negativo. (Teorema de Bendixson)

(Dica: Lembre que se $g:\overline{U}\to\mathbb{R}$ é continua, em que $U\subset\mathbb{R}^2$ é um aberto limitado com fronteira de conteúdo nulo, $g(x,y)\geq 0$, para todo $(x,y)\in U$, e $\int\int_U g(x,y)\,dxdy=0$, então g é identicamente nula).

3) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ uma função tal que $\nabla.f(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ nunca se anula. Existem soluções periódicas da EDO definida por essa função?

4) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=\left(y-x^3,-x^3\right)$. Existem soluções periódicas da EDO definida por essa função?

5) Generalize o resultado do exercício 1. Mostre que se existe uma função $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\nabla.(\rho f)$ não muda de sinal nem é identicamente igual a zero em nenhum aberto, então não existem soluções periódicas da EDO definida por f. (Dica: Apenas use novamente o Teorema de Green tal como no exercício 1).

6) Seja $f(x,y)=(x(3-2x-2y),y(2-2x-y))$. Mostre que a EDO não possui soluções periódicas no conjunto $x>0$ e $y>0$. (Dica: Use $\rho(x,y)=(xy)^{-1}$).