EXERCÍCIO PARA ENTREGAR - MAP 0217 / MAT 0311

PROF: PEDRO T. P. LOPES WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/CALCULOV2019

Vimos em sala de aula o importante Teorema da Aplicação Aberta.

Teorema 1. *(Teorema da Aplicação Aberta) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Seja $a \in \Omega$ tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Logo existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \Omega$, $f(B_r(a))$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : B_r(a) \to f(B_r(a))$ é um difeomorfismo e $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.*

Acima estamos usando $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| < r\}$.

Para provar esse teorema, primeiro provamos o seguinte resultado:

Proposição 2. *(Diferenciabilidade do Homeomorfismo Inverso) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Suponha que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ seja um aberto e que $f : \Omega \to f(\Omega)$ seja um homeomorfismo. Se $f'(a)$ é um isomorfismo para algum $a \in \Omega$, então f^{-1} é diferenciável em $f(a)$ e $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = (f'(a))^{-1}$.*

A seguir, provamos a seguinte proposição:

Proposição 3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Seja $a \in \Omega$ tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Logo existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \Omega$, $f(B_r(a))$ é um aberto e $f : B_r(a) \to f(B_r(a))$ é um homeomorfismo.*

Vimos, por fim, que o Teorema da Aplicação Aberta segue facilmente das Proposições 2 e 3.

O objetivo do exercício proposto a seguir é demonstrar a Proposição 3 de uma maneira diferente àquela feita em sala de aula.

De fato, a demonstração que faremos é mais conhecida e pode ser generalizada em outros contextos. Portanto, é interessante estudá-la.

Item 1.

Sejam $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e $f : \overline{B_r(a)} \to \mathbb{R}^n$ uma função definida em $\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| \le r\}$. Suponha que exista $\lambda \in]0, 1[$ tal que:

i) $\|f(x) - f(y)\| \le \lambda \|x - y\|$, $\forall x, y \in \overline{B_r(a)}$.

ii) $\|f(a) - a\| \le (1 - \lambda) r$.

Mostre que $f\left(\overline{B_r(a)}\right) \subset \overline{B_r(a)}$ e conclua, usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que existe um único ponto fixo $\overline{x} \in \overline{B_r(a)}$ de f, ou seja, tal que $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Para os itens abaixo, considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma contração, ou seja, uma função para a qual existe $\lambda \in]0, 1[$ tal que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \lambda \|x - y\|$, para todo $x, y \in \Omega$. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = x + \varphi(x)$.

Item 2.

Usando que $\|a + b\| \ge \|a\| - \|b\|$, mostre que

$$\|f(x) - f(y)\| \ge (1 - \lambda) \|x - y\|, \ \forall x, y \in \Omega.$$

Conclua que f é injetora e, portanto, que $f : \Omega \to f(\Omega)$ é uma bijeção.

Item 3.

Usando o item anterior, conclua que $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ é Lipschitz e, portanto, contínua. Assim, $f : \Omega \to f(\Omega)$ é um homeomorfismo.

Item 4.

Seja $a \in \Omega$ e $b = f(a)$. Seja $r > 0$ tal que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ e $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z - b\| < s := (1 - \lambda) r$. Defina a função $\xi : \overline{B_r(a)} \to \mathbb{R}^n$ por $\xi(x) = z - \varphi(x)$.

i) Mostre que $\|\xi(x) - \xi(y)\| \le \lambda \|x - y\|$, para todo $x, y \in \overline{B_r(a)}$.

ii) Mostre que $\|\xi(a) - a\| \le (1 - \lambda) r$.

iii) Conclua que existe um ponto fixo de ξ e, portanto, existe $w \in \overline{B_r(a)}$ tal que $f(w) = z$.

Item 5.

Juntando os Itens 2, 3 e 4, prove o seguinte teorema:

Teorema 4. *(Teorema da Perturbação da Unidade) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *uma contração, ou seja, uma função para a qual existe* $\lambda \in \left]0,1\right[$ *tal que* $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$*, para todo* $x, y \in \Omega$*. Seja* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *dada por* $f(x) = x + \varphi(x)$*. Logo* $f : \Omega \to f(\Omega)$ *é um homeomorfismo e* $f(\Omega)$ *é um aberto de* $\mathbb{R}^n$*.*

Item 6.

Prove o seguinte Corolário do Teorema da Perturbação da Unidade.

Corolário 5. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *uma função definida por* $f(x) = T(x) + \varphi(x)$*, em que*

i) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é uma transformação linear bijetora.*

ii) Existe $\lambda < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ *tal que* $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \lambda \|x - y\|$ *para todo* $x, y \in \Omega$*.*

Logo $f : \Omega \to f(\Omega)$ *é um homeomorfismo e* $f(\Omega)$ *é um aberto.*

(Dica: Comece considerando a função $T^{-1} \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e mostre que ela satisfaz as hipóteses do Teorema da Perturbação da Unidade).

Item 7.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. Seja $a \in \Omega$ tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Mostre que existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subset \Omega$, $f(B_r(a))$ é aberto e $f : B_r(a) \to f(B_r(a))$ é um homeomorfismo.

(Dica: Defina a função $s(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ e mostre que $s(a) = 0$ e $s'(a) = 0$. Observe também que $f(x) = f'(a)(x) + (f(a) - f'(a)(a) + s(x))$ e aplique o Corolário anterior, verificando que suas condições são válidas para $r > 0$ suficientemente pequeno).