Exercício para entregar 1 - Matemática 3

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/~pplopes/matematica3

30 de agosto de 2017

Método dos Mínimos quadrados

Sejam dadas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ... e $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e pontos x_1, ..., $x_N \in \mathbb{R}$. O objetivo deste exercício é achar a_0, ..., $a_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_0 g_0 + ... + a_m g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

seja a melhor aproximação possível de f nos pontos x_1, ..., x_N.

Para tanto, definimos o erro da aproximação como:

$$E\left(a_0, ..., a_m\right) = \sum_{k=1}^{N} \left|f\left(x_k\right) - a_0 g_0\left(x_k\right) - ... - a_m g_m\left(x_k\right)\right|^2 .$$

A fim de entender este problema, resolva as questões abaixo:

1) Seja $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$: $\langle (y_1, ..., y_N), (w_1, ..., w_N) \rangle := \sum_{k=1}^{N} y_k w_k$ e $\|.\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a norma associada a este produto interno: $\|(y_1, ..., y_N)\| := \sqrt{\langle (y_1, ..., y_N), (y_1, ..., y_N) \rangle}$. Vamos definir os seguintes vetores em $\mathbb{R}^N$: $\tilde{f} := (f(x_1), ..., f(x_N))$, $\tilde{g}_0 := (g_0(x_1), ..., g_0(x_N))$, ..., $\tilde{g}_m := (g_m(x_1), ..., g_m(x_N))$. Mostre que

$$E\left(a_0, ..., a_m\right) = \left\|\tilde{f} - a_0 \tilde{g}_0 - ... - a_m \tilde{g}_m\right\|^2 .$$

2) Seja $W = L\left(\{\tilde{g}_0, ..., \tilde{g}_m\}\right)$ o subespaço de $\mathbb{R}^N$ gerado por $\{\tilde{g}_0, ..., \tilde{g}_m\}$. Mostre que $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}$ são números reais tais que o erro $E\left(a_0, ..., a_m\right)$ é o menor possível se, e somente se, $a_0 \tilde{g}_0 + ... + a_m \tilde{g}_m$ é a projeção de $\tilde{f}$ em W.

3) Seja $\tilde{h} \in \mathbb{R}^N$. Mostre que $\tilde{h}$ é ortogonal a W se, e somente se, $\left\langle \tilde{h}, \tilde{g}_j \right\rangle = 0$, para todo $j = 0, ..., m$. Conclua que $a_0 \tilde{g}_0 + ... + a_m \tilde{g}_m$ é a projeção de $\tilde{f}$ em W se, e somente se, $\tilde{f} - a_0 \tilde{g}_0 - ... - a_m \tilde{g}_m$ for ortogonal a todo $\tilde{g}_j$, $j = 0, ..., m$.

4) Mostre que $a_0, ..., a_m \in \mathbb{R}$ são tais que o erro $E\left(a_0, ..., a_m\right)$ é o menor possível se, e somente se, a_0, ..., a_m resolve o sistema abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0 \langle \tilde{g}_0, \tilde{g}_0 \rangle + ... + a_m \langle \tilde{g}_m, \tilde{g}_0 \rangle = \left\langle \tilde{f}, \tilde{g}_0 \right\rangle \\ a_0 \langle \tilde{g}_0, \tilde{g}_1 \rangle + ... + a_m \langle \tilde{g}_m, \tilde{g}_1 \rangle = \left\langle \tilde{f}, \tilde{g}_1 \right\rangle \\ \vdots \\ a_0 \langle \tilde{g}_0, \tilde{g}_m \rangle + ... + a_m \langle \tilde{g}_m, \tilde{g}_m \rangle = \left\langle \tilde{f}, \tilde{g}_m \right\rangle \end{array} \right. .$$

5) Mostre que no caso em que $\langle \tilde{g}_i, \tilde{g}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e $\langle \tilde{g}_j, \tilde{g}_j \rangle \neq 0$ para todo j, temos que

$$a_j = \frac{\left\langle \tilde{f}, \tilde{g}_j \right\rangle}{\langle \tilde{g}_j, \tilde{g}_j \rangle}.$$

6) Ache a_0, a_1, a_2 tais que $a_0 + a_1 \mathrm{sen}\left(x\right) + a_2 \cos\left(x\right)$ é a melhor aproximação possível de $f\left(x\right) = x$ nos pontos $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$ e π.