Exercício para entregar 1 - Matemática 3 (2018)

Prof: Pedro Tavares Paes Lopes www.ime.usp.br/∼pplopes/matematica3

10 de setembro de 2018

Aproximação por funções trigonométricas

Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Nosso objetivo é aproximar esta função por uma da forma

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n sen(nx) + b_n cos(nx)\right),$$

em que a_n e b_n pertencem a $\mathbb{R}$ e $N \in \mathbb{N}$ é um número fixo.

Para tanto, definimos o erro da aproximação como

$$E(a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n sen(nx) + b_n cos(nx)\right) \right) \right|^2 dx.$$

Para entender este problema, resolva as questões abaixo:

1) Seja $\langle ., . \rangle : C([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \times C([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ a função definida como

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Mostre que esta função define um produto interno em $C([-\pi, \pi], \mathbb{R}) = \{f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R};\ f \text{ é contínua}\}$

2) Considere $\|.\| : C([-\pi, \pi], \mathbb{R}) \to [0, \infty[$ a norma que vem deste produto interno. Mostre que

$$E(a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N) = \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n sen(nx) + b_n cos(nx)\right) \right) \right\|^2.$$

3) Seja W o subespaço de $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ gerado por $\{1, sen(x), ..., sen(Nx), cos(x), ..., cos(Nx)\}$. Mostre que $\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(x), ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(Nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(x), ..., \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(Nx) \right\}$ é uma base ortonormal de W.

4) Seja V um espaço vetorial real com produto interno $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ e $\|.\| : V \to [0, \infty[$ a norma que vem deste produto interno. Seja W um subespaço de dimensão finita de V. Se $f \in V$, então sabemos que f pode ser escrito de maneira única como $f_1 + f_2$, em que $f_1 \in W$ é a projeção ortogonal de f em W e $f_2 \in W^{\perp}$, ou seja, f_2 é ortogonal a W. Mostre que se $g \in W$, então

$$\|f - g\|^2 = \|f_1 - g\|^2 + \|f_2\|^2.$$

Conclua que o vetor $g \in W$ que minimiza $\left\{ \|f - g\|^2, g \in W \right\}$ é dado por $g = f_1$.

5) Aplique o resultado do item 4) para $V = C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ e W o subespaço de $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ gerado por $\{1, sen(x), ..., sen(Nx), cos(x), ..., cos(Nx)\}$. Conclua que o erro $E(a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N)$ é o menor possível quando $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n sen(nx) + b_n cos(nx)\right)$ é a projeção ortogonal de f em W. Usando o item 3), calcule os coeficientes a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N da melhor aproximação possível de uma função f contínua em polinômios trigonométricos. Estes números são chamados de coeficientes de Fourier de f.

6) É possível escrever também uma aproximação por exponenciais complexas. Dado uma função $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n sen(nx) + b_n cos(nx))$, em que $a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N \in \mathbb{C}$, mostre que existem $c_{-N}, ..., c_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

Por outro lado, mostre que se $f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, então existem constantes $a_0, ..., a_N, b_1, ..., b_N \in \mathbb{C}$ tais que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n sen(nx) + b_n cos(nx))$. Ache as relações entre os coeficientes c_j e os coeficientes a_j e b_j. (Dica: não é muito difícil provar isto. Não precisa usar os resultados anteriores. Apenas use que $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.)