Exercício para entregar 2 - Matemática 3

Prof: Pedro Tavares Paes Lopes www.ime.usp.br/$\sim$pplopes/matematica3

11 de outubro de 2017

Estudo de Cônicas

Nosso objetivo é estudar figuras geométricas definidas por expressões da forma:

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0.$$

Para tanto, considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f.$$

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, ou seja, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Logo podemos escrever $F(x_1, x_2) = F(x_1e_1 + x_2e_2)$.

1) Mostre que

$$F(x_1e_1 + x_2e_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f.$$

2) Consideremos uma base $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$ e uma matriz $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Conclua que $y_1g_1 + y_2g_2 = x_1e_1 + x_2e_2$, em que $x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2$ e $x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2$.

3) Mostre que $F(y_1g_1 + y_2g_2)$ é igual a

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + f.$$

4) Conclua que se λ_1 e λ_2 são os autovalores de $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$ é um autovetor de norma 1 associado a λ_1 e $\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}$ é um autovetor de norma 1 associado a λ_2 ortogonal a $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$, então

$$F(y_1g_1 + y_2g_2) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + (dc_{11} + ec_{21})\, y_1 + (dc_{12} + ec_{22})\, y_2 + f.$$

5) Considere o conjunto $\mathcal{V} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - x_1 = 0\right\}$. Mostre que existe uma base ortonormal $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $y_1g_1 + y_2g_2 \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $y_2 = ay_1^2 + by_1$ para $a \neq 0$, ou seja, a figura representa uma parábola.

6) Considere o conjunto $\mathcal{V} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1x_2 - 1 = 0\right\}$. Mostre que existe uma base ortonormal $\mathcal{C} = (g_1, g_2)$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $y_1g_1 + y_2g_2 \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $y_1^2 - y_2^2 = a$, para $a \neq 0$, ou seja, a figura representa uma hipérbole.