Exercício para entregar 3 - Matemática 3

Prof: Pedro T. P. Lopes www.ime.usp.br/∼pplopes/matematica3

27 de novembro de 2017

Funções diferenciáveis e regra da cadeia

Seja $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função bilinear, ou seja, tal que para todo u, v e w em $\mathbb{R}^n$ e α e β em $\mathbb{R}$, tenhamos

$$B(\alpha u + \beta v, w) = \alpha B(u, w) + \beta B(v, w).$$

e

$$B(w, \alpha u + \beta v) = \alpha B(w, u) + \beta B(w, v).$$

1) Mostre que B é diferenciável e que

$$dB(a, b)(u, v) = B(a, v) + B(u, b).$$

2) Sejam $f_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(u, v) = \langle u, v \rangle, \quad f_2(u) = \|u\|^2, \quad f_3(A_1, A_2) = det(A_1, A_2),$$

em que (A_1, A_2) é a matriz 2×2 cujas linhas são A_1 e A_2. Calcule

$$df_1(a, b)(u, v),\ df_2(a)(u)\,\mathrm{e}\,df_3(A_1, A_2)(B_1, B_2).$$

3) Sejam $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ e $A = (A_1, A_2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, em que $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Mostre que CA é a matriz cuja primeira linha é igual a $c_{11}A_1 + c_{12}A_2$ e a segunda linha é igual a $c_{21}A_1 + c_{22}A_2$, ou seja, $CA = (c_{11}A_1 + c_{12}A_2, c_{21}A_1 + c_{22}A_2)$.

4) Conclua que se $A = (A_1, A_2)$ e $C = (C_1, C_2)$, então

$$d\,det(A)(CA) = tr(C)det(A).$$

5) Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ e $X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) \end{pmatrix}$ são tais que $X'(t) = AX(t)$, então mostre que

$$\frac{d}{dt} det(X(t)) = tr(A)det(X(t)).$$