PROVA 1 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1 Ponto) a) Calcule o comprimento da curva dada por $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = \left(cos^3(t), sen^3(t)\right)$.

Resolução:

Observamos que $\alpha'(t) = 3\left(-cos^2(t)\, sen(t), sen^2(t)\, cos(t)\right)$. Logo

$$\|\alpha'(t)\| = 3\left\|\left(-cos^2(t)\, sen(t), sen^2(t)\, cos(t)\right)\right\| = 3\sqrt{(cos^4(t) sen^2(t) + sen^4(t) cos^2(t))}$$

$$= 3\sqrt{(cos^2(t) + sen^2(t))\, cos^2(t) sen^2(t)} = 3 sen(t) cos(t) = \frac{3}{2} sen(2t).$$

Assim, o comprimento é

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\alpha'(t)\|\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(2t)\, dt = -\frac{3}{2}\, \frac{cos(2t)}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

.

Logo o comprimento é igual a $\frac{3}{2}$.

(1 Ponto) b) Calcule $\int_C y dz - 2z dx$, em que C é a curva que começa em $(1,2,0)$ e vai até $(0,0,\sqrt{5})$ e está contida na intersecção das superfícies definidas por $x^2+y^2+z^2=5$ e por $y=2x$

Resolução:

Basta fazer uma parametrização adequada. A curva é dada por $\alpha : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$, em que $\alpha(t) = \left(cos(t), 2cos(t), \sqrt{5} sen(t)\right)$. Assim, $\alpha'(t) = \left(-sen(t), -2sen(t), \sqrt{5} cos(t)\right)$ e

$$\int_C y dz - 2z dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2cos(t)\sqrt{5} cos(t) + 2\sqrt{5} sen(t) sen(t) dt = 2\sqrt{5}\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{5}.$$

(1 Ponto) c) Considere uma partícula que vai do ponto $(1,1)$ até o ponto $(2,2)$ num campo de forças definido por $f(x,y) = \left(2xy, x^2\right)$. Calcule o trabalho realizado pela partícula em seu deslocamento.

Resolução:

Observamos que $f(x,y) = \nabla\varphi(x,y)$, em que $\varphi(x,y) = x^2 y$. Logo f é um campo gradiente. Portanto, para qualquer caminho γ que leva $(1,1)$ até $(2,2)$, o trabalho realizado é dado por

$$\int_\gamma f.d\gamma = \int_\gamma \nabla\varphi.d\gamma = \varphi(2,2) - \varphi(1,1) = 8 - 1 = 7.$$

O trabalho é igual a 7.

Exercício 2

(1 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,0); x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ a função dada por $f(x,y,z) = \left(0, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}\right)$. Esta função tem rotacional nulo? Ela é conservativa?

Resolução:

Seja $f(x,y,z) = \left(0, \frac{-z}{y^2+z^2}, \frac{y}{y^2+z^2}\right) = (f_1, f_2, f_3)$.

Esta função tem rotacional nulo, pois

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-z}{y^2+z^2}\right) = \frac{-1}{y^2+z^2} + \frac{2z^2}{(y^2+z^2)^2} = \frac{z^2-y^2}{(y^2+z^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{y^2+z^2}\right) = \frac{1}{y^2+z^2} - \frac{2y^2}{(y^2+z^2)^2} = \frac{z^2-y^2}{(y^2+z^2)^2}.$$

Logo $\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$. Da mesma forma, trivialmente vemos que $\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.

Vemos também que a função não é conservativa. De fato, se $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ é a curva fechada simples dada por $\alpha(t) = (0, cos(t), sen(t))$, então

$$\int f.\alpha = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(0, \frac{-sen(t)}{sen^2(t) + cos^2(t)}, \frac{cos(t)}{sen^2(t) + cos^2(t)}\right), (0, -sen(t), cos(t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{sen^2(t) + cos^2(t)}{sen^2(t) + cos^2(t)} dt = 2\pi \neq 0.$$

Se o campo fosse conservativo, a integral de qualquer curva fechada simples seria igual a 0.

(1 Ponto) b) O espaço $\{(x, 0, 0)\, ; x \in \mathbb{R}\}$ é simplesmente conexo? Justifique.
Resolução:
Não, se fosse simplesmente conexo, todo campo com rotacional nulo seria conservativo, o que não é o caso, pelo que vimos no item a.

Exercício 3

(1,5 ponto) a) Dado uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ definimos sua normal como $n(t) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$. Seja C uma curva de Jordan C^1 por partes e f e g duas funções de classe C^2 num aberto que contém a curva e o seu interior. Mostre que $\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \int\int_{\text{int} C} (f\Delta g + \nabla f.\nabla g)\, dxdy$.
Resolução:
Basta observar que

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_C f \left\langle \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right), \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right\rangle \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$= \oint_C f \left(\frac{\partial g}{\partial x} y' - \frac{\partial g}{\partial y} x'\right) dt = \oint_C f \frac{\partial g}{\partial x} dy - f \frac{\partial g}{\partial y} dx.$$

Usando o teorema de Green concluímos que

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial x} dy - f \frac{\partial g}{\partial y} dx = \int\int_{\text{int} C} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f \frac{\partial g}{\partial y}\right)\right) dxdy = \int\int_{\text{int} C} (f\Delta g + \nabla f.\nabla g)\, dxdy.$$

(1 ponto) b) Dizemos que $u \in C^2(\Omega)$ é um autovetor do Laplaciano com autovalor λ se $\Delta u = \lambda u$. Dizemos que este autovetor satisfaz a condição de Dirichlet se $u|_{\partial\Omega} = 0$. Dizemos que este autovetor satisfaz a condição de Neumann se $\partial_n u|_{\partial\Omega} = 0$. Mostre que se Ω é o interior de uma curva de Jordan C^1 por partes, então todo autovetor com condições de Dirichlet ou de Neumann possui autovalor $\lambda \leq 0$.
Resolução:
Seja u um autovetor do Laplaciano. Pelo item a, concluímos que

$$\int\int_{\text{int} C} (u\Delta u + \nabla u.\nabla u)\, dxdy = \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

pois ou u ou $\frac{\partial u}{\partial n}$ é igual a zero em C. Logo $\int\int_{\text{int} C} u\Delta u dxdy = -\int\int_{\text{int} C} \nabla u.\nabla u dxdy$.
Como $\Delta u = \lambda u$, vemos que

$$\lambda \int\int_{\text{int} C} u^2 dxdy = -\int\int \nabla u.\nabla u dxdy.$$

Assim,

$$\lambda \int\int_{\text{int} C} u^2 dxdy = -\frac{\int\int \|\nabla u\|^2 dxdy}{\int\int_{\text{int} C} u^2 dxdy} \leq 0.$$

Exercício 4

(2,5 ponto) Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Seja Q o quadrado com vértices $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ e $(2, 2)$. Esboce o conjunto $S := \varphi(Q)$, imagem do quadrado pela função Q. Calcule

$$\int\int_S y^2 dxdy.$$

Resolução:
Basta usar o teorema de mudança de coordenadas. Vemos que

$$d\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \implies det(d\varphi(u, v)) = 2(u^2 + v^2).$$

Assim,

$$\int\int_S y^2dxdy = \int\int_{\varphi^{-1}(S)} (y\circ\varphi(u,v))^2\, det\,(d\varphi(u,v))\, dudv = \int\int_Q (2uv)^2\, 2\left(u^2+v^2\right) dudv$$
$$= 8\int_1^2\int_1^2 \left(u^4v^2+u^2v^4\right) dudv = 16\int_1^2\int_1^2 u^4v^2dudv = \frac{16}{15}\left(2^5-1\right)\left(2^3-1\right) = \frac{16\times 31\times 7}{15}.$$

Formulário.

Definição 1. Seja $f=(f_1,...,f_n):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Definimos a integral de linha por

$$\int f.d\alpha=\int f_1dx_1+...+f_ndx_n=\int_a^b f\left(\alpha\left(t\right)\right).\alpha'\left(t\right)dt.$$

Seja $g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Definimos a integral pelo comprimento da curva por

$$\int gds=\int_a^b g\left(\alpha\left(t\right)\right)\left\|\alpha'\left(t\right)\right\|dt.$$

Exemplo 2. Integral de linha pode ser usada para cálculo de trabalho. Integral pelo comprimento da curva pode ser usado para o cálculo de comprimento, massa, centro de massa e etc. Se $\rho:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ descreve a densidade, então a massa de um objeto descrito pela curva $\alpha:[a,b]\to\Omega$ é dada por $\int\rho ds$. O centro de massa é o vetor $(y_1,...,y_n)$ dado por $y_j=\frac{\int\rho x_j ds}{\int\rho ds}$.

Definição 3. Uma função $f=(f_1,...,f_n):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ é um campo conservativo se existe $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $f=\nabla\varphi$.

Definição 4. Um conjunto aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é simplesmente conexo se toda curva fechada simples pode ser deformada em um ponto, isto é, dado $\alpha:[a,b]\to\Omega$ contínua, existe $H:[0,1]\times[a,b]\to\Omega$ contínua tal que $H\left(0,t\right)=\alpha\left(t\right)$ e $H\left(1,t\right)=p\in\Omega$. Conjuntos estrelado (Existe $p\in\Omega$ tal que todo outro ponto de Ω pode ser ligado por um segmento de reta) são simplesmente conexos.

Proposição 1. *Se f é uma função conservativa de classe C^1, então seu rotacional é zero. (Dizemos que f tem rotacional zero se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$). Se Ω é simplesmente conexo, f é de classe C^1 e tem rotacional igual a zero, então Ω é simplesmente conexo.*

Definição 5. Seja $\alpha:[a,b]\to\Omega$ uma curva de Jordan (fechada e simples) de classe C^1 cujo interior, denotado por R, pertence ao aberto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Sejam $P,Q:\Omega\to\mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Logo

$$\int_{Im(\alpha)}Pdx+Qdy=\int\int_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Definição 6. Seja $Q\subset\mathbb{R}^n$ e $\varphi:Q\to\tilde{Q}$ um difeomorfismo. Seja $f:Q\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Logo

$$\int_Q fdx=\int_{\varphi^{-1}(Q)}f\circ\varphi\left|\det d\varphi\right|dx,$$

em que $\det\left(d\varphi\right)=\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\varphi x_j}\right)$.