PROVA 2 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,5 Ponto) Calcule a área da superfície dada por $z^2 = x^2 + y^2$, em que $0 \leq z \leq \frac{3-y}{2}$.

Resolução:

Vamos parametrizar a superfície da seguinte forma: Consideraremos $\varphi(x,y) = \left(x, y, \sqrt{x^2+y^2}\right)$.

Logo $\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$. Assim, $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x} \times \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\| = \sqrt{2}$. Logo

$$área = \int\int_{\Omega} \sqrt{2}dxdy,$$

em que $\Omega = \left\{0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3-y}{2}\right\}$. Note que

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \frac{3-y}{2} \iff x^2+y^2 \leq \left(\frac{3-y}{2}\right)^2 \iff$$

$$x^2+y^2 \leq \frac{1}{4}\left(9-6y+y^2\right) \iff x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y \leq \frac{9}{4} \iff$$

$$x^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 \leq 3.$$

Para calcular a integral, faremos então a seguinte mudança de coordenadas: Consideraremos $x = \sqrt{3}rcos(\theta)$ e $y = -1 + 2rsen(\theta)$. Logo

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \sqrt{3}cos(\theta) & -\sqrt{3}rsen(\theta) \\ 2sen(\theta) & 2rcos(\theta) \end{pmatrix} = 2\sqrt{3}r.$$

Assim

$$\int\int_{\Omega} \sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2}\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta = 2\sqrt{6}\pi.$$

Exercício 2

Seja S_1 o hemisfério $x^2+y^2+z^2 = 1$, $z \geq 0$, e n_1 a normal unitária que aponta para fora da esfera. Seja S_2 a região $\left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq 1\right\}$ e $n_2 = (0,0,-1)$.

(1 Ponto) a) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x,y,z) = \left(2x + \text{sen}\left(y^2\right), -4y + \cos\left(x^2+z^6\right), 2z + e^{15x}\right)$. Calcule o fluxo de f em $S = S_1 \cup S_2$ na direção n em que n é igual a n_1 sobre S_1 e é igual a n_2 sobre S_2.

Resolução:

Basta observar que $\nabla.\left(2x + \text{sen}\left(y^2\right), -4y + \cos\left(x^2+z^6\right), 2z + e^{15x}\right) = 2 - 4 + 2 = 0$. Logo, pelo teorema da divergência, $\int\int_{S_1\cup S_2} f.ndS = \int\int_{\text{int}(S_1\cup S_2)} \nabla.fdx = 0$.

(0,5 Ponto) b) Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função dada por $f(x,y,z) = (2x, -4y, 2z+1)$. Calcule o fluxo de f em S_1 na direção n_1 e o fluxo de f em S_2 na direção n_2.

Resolução:

Observamos que $\nabla.(2x, -4y, 2z+1) = 2 - 4 + 2 = 0$. Logo $\int\int_{S_1\cup S_2} f.ndS = \int\int_{\text{int}(S_1\cup S_2)} \nabla.fdx = 0$. Concluímos, assim, que $\int\int_{S_1} f.ndS = -\int\int_{S_2} f.ndS$.

Agora calculando $\int\int_{S_2} f.ndS$, obtemos

$$\int\int_{S_2} f.ndS = \int\int_{B_1(0)} (2x, -4y, 1).(0,0,-1)\,dxdy = -\int\int_{B_1(0)} dxdy = -\pi.$$

Logo, como $\int\int_{S_2} f.ndS = -\pi$, concluímos que $\int\int_{S_1} f.ndS = \pi$.

Poderíamos calcular $\int\int_{S_1} f.ndS$ “na marra” também. No entanto, as contas são muito maiores.

Exercício 3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ uma região conexa e limitada com bordo $\partial\Omega$ de classe C^1. Considere o seguinte problema: Ache uma função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), \; x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = g(x), \; x \in \partial\Omega \end{cases},$$

em que $\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \nabla u, n \rangle$ é a derivada direcional na direção de n, sendo n a normal que aponta para fora de Ω e $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funções contínuas.

(1 ponto) a) Mostre que se existe uma solução u do problema acima, então f e g devem satisfazer $\int\int\int_\Omega f(x)\,dx = \int\int_{\partial\Omega} g(x)\,dS$.
Resolução:
Utilizando o teorema da divergência e o fato de que $\nabla.(\nabla u) = \Delta u$, obtemos

$$\int\int\int_\Omega f(x)\,dx = \int\int\int_\Omega \Delta u(x)\,dx = \int\int\int_\Omega \nabla.(\nabla w(x))\,dx = \int\int_{\partial\Omega} \nabla u(x).ndS = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\,dS = \int\int_{\partial\Omega} g(x).ndS.$$

(1 ponto) b) Mostre que se v é uma outra solução do problema, então existe uma constante $C > 0$ tal que $u = v + C$.

Resolução:
Inicialmente observamos que se w é uma função de classe C^2 tal que $\Delta w = 0$, então, pelo teorema da divergência, temos

$$\int\int\int_\Omega \|\nabla w(x)\|^2\,dx = \int\int\int_\Omega \nabla w.\nabla w dx = \int\int\int_\Omega \nabla(w\nabla w) - w\Delta w dx = \int\int\int_\Omega \nabla(w\nabla w)\,dx = \int\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n}(x)\,dS.$$

Logo, se u e v são soluções do problema, então $\Delta u = \Delta v = 0$. Assim, temos

$$\int\int\int_\Omega \|\nabla(u-v)(x)\|^2\,dx = \int\int_{\partial\Omega}(u-v)\left(\frac{\partial u}{\partial n}(x) - \frac{\partial v}{\partial n}(x)\right)dS = \int\int_{\partial\Omega}(u-v)(g(x)-g(x))\,dS = 0.$$

Desta forma, $\int\int\int_\Omega \|\nabla(u-v)(x)\|^2\,dx = 0$. Portanto, como $\|\nabla(u-v)(x)\| \geq 0$ e a função é contínua, concluímos que $\nabla(u-v)(x) = 0$, para todo $x \in \Omega$. Como Ω é conexo, concluímos que $u - v$ é uma função constante. Logo $u(x) = v(x) + C$.

Dica: Use o teorema da divergência e prove que se $w : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2, então
i) $\int\int\int_\Omega \Delta w(x)\,dx = \int\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n}(x)\,dS$.
ii) $\int\int_{\partial\Omega} w\frac{\partial w}{\partial n}(x)\,dS = \int\int\int_\Omega \|\nabla w(x)\|^2\,dx$, se $\Delta w = 0$.

Exercício 4

(2 pontos) Seja a superfície com bordo S definida como $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $0 \leq z \leq \sqrt{2}$ e n a normal que aponta para fora da esfera de raio 2. Calcule $\int\int_S \nabla \times f.ndS$, em que $f(x,y,z) = \left(zy\cos\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), z\text{sen}\left(\frac{\pi z^2}{2}\right), yz\right)$.
Resolução:
Pelo teorema de Stokes, temos

$$\int\int_S \nabla \times f.ndS = \int_{\partial S} f.d\gamma,$$

em que ∂S é composta de duas curvas: $\gamma_1 = (2cos(\theta), 2sen(\theta), 0)$ e $\gamma_2 = \left(\sqrt{2}cos(\theta), \sqrt{2}sen(\theta), \sqrt{2}\right)$. Calculando, temos

$$\int_{\gamma_1} f.d\gamma = \int_0^{2\pi}(0,0,0).(-2sen(\theta), 2cos(\theta), 0)\,d\theta = 0$$

e

$$\int_{\gamma_2} f.d\gamma = \int_0^{2\pi}\left(2sen(\theta)\cos(\pi), \sqrt{2}\text{sen}(\pi), 2sen(\theta)\right).\left(-\sqrt{2}sen(\theta), \sqrt{2}cos(\theta), 0\right)d\theta = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} sen^2(\theta)\,d\theta = 2\sqrt{2}\pi$$

Usando a regra da mão direita e o teorema de Stokes, obtemos

$$\int\int_S \nabla \times f.ndS = \int_{\gamma_1} f.d\gamma - \int_{\gamma_2} f.d\gamma = -2\sqrt{2}\pi.$$

Exercício 5

(1 ponto) a) Considere a 1-forma diferencial $\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,dx + f_2(x,y,z)\,dy + f_3(x,y,z)\,dz$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ tal que $d\omega(x,y,z) = g_1(x,y,z)\,dy \wedge dz + g_2(x,y,z)\,dz \wedge dx + g_3(x,y,z)\,dx \wedge dy$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.
Resolução:

Basta calcular.

$$\begin{aligned} d\omega(x,y,z) &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right)\wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right)\wedge dz \\ &= -\frac{\partial f_1}{\partial y}dx\wedge dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\wedge dx + \frac{\partial f_2}{\partial x}dx\wedge dy - \frac{\partial f_2}{\partial z}dy\wedge dz - \frac{\partial f_3}{\partial x}dz\wedge dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy\wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\right)dz\wedge dx + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)dx\wedge dy. \end{aligned}$$

Logo $g = \nabla \times f$.

(1 ponto) b) Considere a 2-forma diferencial $\omega(x,y,z) = f_1(x,y,z)\,dy\wedge dz + f_2(x,y,z)\,dz\wedge dx + f_3(x,y,z)\,dx\wedge dy$ em $\mathbb{R}^3$. Existe uma função g tal que $d\omega(x,y,z) = g(x,y,z)\,dx\wedge dy\wedge dz$. Quem é essa função? Justifique calculando $d\omega$.

Resolução:

Novamente, calculando obtemos

$$\begin{aligned} &d\omega(x,y,z) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz\right)\wedge dy\wedge dz + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz\right)\wedge dz\wedge dx + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x}dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\right)\wedge dx\wedge dy \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial f_3}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz. \end{aligned}$$

Logo $g = \nabla . f$.

Formulário.

Definição 1. Seja $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S = \varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície é definida como
$$\int\int_{\Omega} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que $S \subset U$, é definida como
$$\int\int_S f dS = \int\int_{\Omega} f \circ \varphi(u,v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\| dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, em que $S \subset U$, é definido como $\int\int_S \langle f, n \rangle dS$. Portanto é calculado como
$$\int\int_{\Omega} \left\langle f \circ \varphi(u,v), \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right\rangle dudv.$$

Teorema 1. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então*
$$\int\int\int_{\Omega} \nabla . u dx = \int\int_{\partial\Omega} \langle u, n \rangle dS,$$
em que n é a normal unitária que aponta para fora.

Teorema 2. *O teorema de Stokes nos diz que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*
$$\int\int_S \nabla \times u . n dS = \int_{\partial S} u . d\alpha,$$
em que $\int_{\partial S} u . d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita.

Definição 2. Uma p-forma ω em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, com p-cópias de $\mathbb{R}^n$, linear em cada uma das coordenadas e alternada. Em particular, temos
$$dx_i(v_1, ..., v_n) = v_i,$$
$$dx_i \wedge dx_j \left((v_1, ..., v_n), (w_1, ..., w_n) \right) = v_i w_j - v_j w_i.$$

Logo $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ e $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Uma p-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ é uma função ω definida num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e que a cada ponto $x \in \Omega$ corresponde uma p-forma $\omega(x)$.

Definição 3. Dado uma p-forma $\omega(x) = \sum_{i=1}^N a_i dx_I$, em que $dx_I = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_N}$, definimos a $p+1$-forma $d\omega$ como
$$d\omega(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k}(x) dx_k \wedge dx_I.$$