PROVA 3 - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

Num jogo da mega sena são sorteados 6 números entre sessenta possibilidades. Os possíveis números são $\{1, 2, 3, ..., 58, 59, 60\}$. Para cada sorteio não importa a ordem em que as bolas são sorteadas.

(1,5 Ponto) a) Calcule a probabilidade de que todos números sorteados pertençam a uma mesma dezena. Por exemplo $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{32, 33, 35, 36, 38, 39\}$, $\{50, 51, 56, 57, 58, 59\}$, e etc. Para tanto, primeiro calcule o número de sorteios em que isso ocorre e divida pelo número de sorteios possíveis na mega sena, lembrando sempre que a ordem dos números sorteados não importa. (Tome cuidado. Na primeira dezena temos 9 números: $\{1, ..., 9\}$, nas demais temos 10 números, por exemplo: $\{20, 21, ..., 29\}$).

Resolução:

No conjunto $\{1, ..., 9\}$, a quantidade de conjuntos com 6 elementos é $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$. Nos conjuntos $\{10, ..., 19\}$, $\{20, ..., 29\}$, $\{30, ..., 39\}$, $\{40, ..., 49\}$ e $\{50, ..., 59\}$, a quantidade de conjuntos com 6 elementos é $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$, Assim temos $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} + 5 \times \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ jogos possíveis. Na mega sena temos 60 números. Assim a quantidade de conjuntos com 6 elementos é $\begin{pmatrix} 60 \\ 6 \end{pmatrix}$. Assim, o número total de jogos na mega sena é $\begin{pmatrix} 60 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Desta maneira, a probabilidade é dada por

$$\frac{\frac{9.8.7.6.5.4}{6!} + 5 \times \frac{10.9.8.7.6.5}{6!}}{\frac{60.59.58.57.56.55}{6!}} = \frac{9.8.7.6.5.4 + 5 \times 10.9.8.7.6.5}{60.59.58.57.56.55}$$

$$= \frac{9.8.7.6.5.4 + 5 \times 10.9.8.7.6.5}{60.59.58.57.56.55} = \frac{60.480 + 756.000}{36.045.979.200} = \frac{816.480}{36.045.979.200} = 2,265 \times 10^{-5}$$

(1 Ponto) b) Suponha que todos os números sorteados pertençam a $\{50, 51, 52, ..., 59\}$. Quantas sorteios (a ordem em que os números foram sorteados não importa!) são possíveis em que obtemos 4 números em sequência e dois fora. Por exemplo: $\{50, 51, 52, 53, 55, 56\}$, $\{50, 51, 52, 53, 55, 57\}$, $\{50, 53, 54, 55, 56, 58\}$, $\{50, 51, 56, 57, 58, 59\}$ e etc. (Dica: Divida entre os casos em que temos sequências de 4 números começando com 50 ou 56 e os casos em que temos sequências começando com 51, 52, 53, 54 ou 55)

Resolução:

Temos que dividir em casos

Se a sequência começa com 50, ou seja, é 50, 51, 52 e 53, então os outros dois números não podem ser 54. Sobram 5 números possíveis: 55, 56, 57, 58 e 59. Assim, o número de conjuntos de dois elementos é $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{5.4}{2} = 10$.

Se a sequência começa com 51, então não podemos ter nem 50, nem 55. Sobram 4 números possíveis. Assim, o número de conjuntos de dois elementos é $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4.3}{2} = 6$.

Se começa com 52, não podemos ter nem 51 nem 56. Logo temos $\frac{4.3}{2} = 6$ jogos.
Se começa com 53, não podemos ter nem 52 nem 57. Logo temos $\frac{4.3}{2} = 6$ jogos.
Se começa com 54, não podemos ter nem 53 nem 58. Logo temos $\frac{4.3}{2} = 6$ jogos.
Se começa com 55, não podemos ter nem 54 nem 59. Logo temos $\frac{4.3}{2} = 6$ jogos.
Se a sequência começa com 56, não podemos ter 55. Logo temos $\frac{5.4}{2} = 10$ jogos.
O total é 50 combinações.

Exercício 2

Um grupo de pessoas está jogando dardos. Suponha que o alvo seja uma bola unitária em $\mathbb{R}^2$, isto é, $S = B_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < 1\}$. Esse grupo é composto de pessoas pouco talentosas. Elas nunca erram o alvo, mas o acertam de forma completamente aleatória. Desta maneira, a probabilidade de que uma pessoa atinja uma região $A \subset B_1(0)$ é dada por

$$P(A) = \frac{\acute{A}rea\,(A)}{\acute{A}rea\,(B_1(0))} = \frac{\acute{A}rea\,(A)}{\pi}.$$

(1,5 Ponto) a) Considere as seguintes variáveis aleatórias $X, Y, Z : B_1(0) \to \mathbb{R}$ dadas por $X(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $Y = X^2$, $Z = e^{X^2}$. Determine a função de distribuição e a função de densidade de cada uma dessas variáveis aleatórias. (Dica: observe que $X^{-1}(]-\infty, r]) = B_r(0)$, quando $0 < r < 1$.)

Resolução:

Basta usar a definição.

Se $0 \le t \le 1$, temos $F_X(t) = P(X \le t) = \frac{\acute{A}rea(B_t(0))}{\acute{A}rea(B_1(0))} = \frac{\pi t^2}{\pi} = t^2$. Se $t < 0$, temos $F_X(t) = P(X \le t) = \frac{\acute{A}rea(\emptyset)}{\acute{A}rea(B_1(0))} = 0$. Se $t > 1$, temos $F_X(t) = P(X \le t) = \frac{\acute{A}rea(B_1(0))}{\acute{A}rea(B_1(0))} = 1$.

Assim,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ t^2,\ 0 \le t \le 1 \\ 1,\ t \ge 1 \end{cases}$$

Derivando em cada um dos intervalos, temos

$$f_X(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 2t,\ 0 \le t \le 1 \\ 0,\ t \ge 1 \end{cases}$$

Agora observamos que $P(Y \le t) = P\left(X^2 \le t\right) = P\left(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}\right) = P\left(X \le \sqrt{t}\right)$, já que $P\left(X < -\sqrt{t}\right) = 0$.

Desta maneira, se $0 \le t \le 1$, temos $F_Y(t) = P(Y \le t) = \frac{\acute{A}rea\left(B_{\sqrt{t}}(0)\right)}{\acute{A}rea(B_1(0))} = \frac{\pi t}{\pi} = t$. Se $t < 0$, temos $F_Y(t) = P\left(X^2 \le t\right) = P(\emptyset) = 0$, pois $t < 0$ e $X^2 \ge 0$. Se $t > 1$, temos $F_Y(t) = P\left(X \le \sqrt{t}\right) = \frac{\acute{A}rea(B_1(0))}{\acute{A}rea(B_1(0))} = 1$.

Assim,

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ t,\ 0 \le t \le 1 \\ 1,\ t \ge 1 \end{cases}$$

Derivando em cada um dos intervalos, temos

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ 1,\ 0 \le t < 1 \\ 0,\ t \ge 1 \end{cases}$$

Agora observamos que $P(Z \le t) = P\left(e^{X^2} \le t\right) = P\left(e^Y \le t\right) = P(Y \le \ln(t)) = F_Y(\ln(t))$. Assim

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0,\ t < 1 \\ \ln(t),\ 1 \le t \le e \\ 1,\ t \ge e \end{cases}$$

Derivando em cada um dos intervalos, temos

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0,\ t < 0 \\ \frac{1}{t},\ 0 \le t < 1 \\ 0,\ t \ge 1 \end{cases}.$$

(1 Ponto) b) Calcule $E(X)$ e $Var(X)$.

Resolução:

Basta usar a definição. Temos

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\,dt = \int_0^1 t2t dt = \frac{2}{3}.$$

Por outro lado,

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 2t\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 dt = \int_0^1 \left(2t^3 - \frac{8}{3}t^2 + \frac{8}{9}t\right) dt = \frac{2}{4} - \frac{8}{9} + \frac{8}{18} = \frac{9 - 16 + 8}{18} = \frac{1}{18}.$$

Exercício 3

Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B eventos.

(1,5 ponto) a) Se $\frac{P(A^c)}{P(A)} = 3$ e $\frac{P(A\cup B)}{P((A\cup B)^c)} = 4$, mostre que

$$\frac{11}{20} \leq P(B) \leq \frac{4}{5}$$

Resolução:
Como $P(A^c) = 1 - P(A)$, concluímos que $1 - P(A) = 3P(A)$. Logo $P(A) = \frac{1}{4}$.
Da mesma maneira, vemos que $P(A \cup B) = 4(1 - P(A \cup B))$. Logo $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$.
Agora basta notar que $P(B) \leq P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ e que $P(B) \geq P(A \cup B) - P(A) = \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = \frac{16-5}{20} = \frac{11}{20}$.

(1 ponto) b) Se A e B são independentes, mostre que $P(A \cup B) = 1 - P(A^c)P(B^c)$.
Resolução:
Basta seguir as seguintes passagens

$$\begin{aligned} 1 - P(A^c)P(B^c) &= 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - (1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B). \end{aligned}$$

Dica: Use nos itens acima que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercício 4

Um material radioativo obedece uma lei de decaimento exponencial com tempo de meia vida de 5 anos. Assim, se $X : S \to [0, \infty[$ corresponde ao tempo de decaimento de um átomo, então F_X tem uma distribuição exponencial tal que $P(X \leq 5) = \frac{1}{2}$.

(1,5 ponto) a) Calcule a probabilidade de que o átomo se desintegre num intervalo $X \geq 10$ (em mais do que 10 anos) e num intervalo $5 \leq X \leq 10$ (entre 1 e 10 anos).
Resolução:
Observemos que $P(X \leq 5) = 1 - e^{-\lambda 5} = \frac{1}{2} \implies e^{-\lambda 5} = \frac{1}{2} \implies -\lambda 5 = -\ln(2) \implies \lambda = \frac{\ln(2)}{5}$.
Logo

$$P(X \geq 10) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda 10}\right) = e^{-\lambda 10} = e^{-\frac{\ln(2)}{5}10} = e^{-2\ln(2)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4}$$

e

$$P(5 \leq X \leq 10) = \left(1 - e^{-\lambda 10}\right) - \left(1 - e^{-\lambda 5}\right) = e^{-\lambda 5} - e^{-\lambda 10} = e^{-\ln(2)} - e^{-2\ln(2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

.

(1 ponto) b) Qual é a probabilidade que o átomo se desintegre em até 1.000.000.005 anos, dado que ele não se desintegrou em 1.000.000.000 de anos. (Use probabilidade condicional).
Resolução: Usando probabilidade condicional, temos que

$$\begin{aligned} &P(0 \leq X \leq 1.000.000.005 | X \geq 1.000.000.000) \\ &= \frac{P((0 \leq X \leq 1.000.000.005) \cap (X \geq 1.000.000.000))}{P(X \geq 1.000.000.000)} = \frac{P(1.000.000.000 \leq X \leq 1.000.000.005)}{P(X \geq 1.000.000.000)} \\ &= \frac{\left(1 - e^{-\lambda 1.000.000.005}\right) - \left(1 - e^{-\lambda 1.000.000.000}\right)}{e^{-\lambda 1.000.000.000}} = \frac{e^{-\lambda 1.000.000.000} - e^{-\lambda 1.000.000.005}}{e^{-\lambda 1.000.000.000}} \\ &= \frac{e^{-\lambda 1.000.000.000}\left(1 - e^{-\lambda 5}\right)}{e^{-\lambda 1.000.000.000}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

FORMULÁRIO.

Definição 1. Um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{B}, P)$ consiste de

1) Um conjunto S.
2) Uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ de S. A $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de S (chamados de eventos) que satisfaz:
a) S e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{B}$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$, então $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.
c) Se $A \in \mathcal{B}$, então $A^c \in \mathcal{B}$.
3) Uma medida de probabilidade $P : \mathcal{B} \to [0,1]$. A medida de probabilidade P é uma função que satisfaz:
a) $P(S) = 1$ e $P(\emptyset) = 1$.
b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos, então $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

No caso em que $S \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, costuma-se tomar como $\mathcal{B}$ a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de S. Este conjunto é muito grande e contém também todos os fechados contidos em S.

Definição 2. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B dois eventos de S. Dizemos que A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Definição 3. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B dois eventos de S com $P(B) \neq 0$. A probabilidade de que A ocorra, dado que B ocorreu é definida como $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. $P(A|B)$ é chamada de probabilidade condicional de A dado que B ocorre.

De maneira análoga a probabilidade de que A ocorra, dado que B não ocorreu é definida como $P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)}$.

Definição 4. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se $X^{-1}(]-\infty, t]) \in \mathcal{B}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A função distribuição associada a X é a função $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definida como $F_X(t) = P(X \leq t)$. Dizemos que F_X possui uma função de densidade $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\, ds.$$

Neste caso, $f_X(t) = \frac{dF_X}{dt}(t)$ nos pontos em que F_X é contínua.

Exemplo 5. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição exponencial se existe $\lambda > 0$ tal que

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t},\ t > 0 \\ 0,\ t \leq 0 \end{cases} \text{ e } F_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0 \\ 0,\ t \leq 0 \end{cases}.$$

Definição 6. Seja $(S, \mathcal{B}, P)$ um espaço de probabilidade e $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória com distribuição contínua e densidade de probabilidade f_X. Definimos

1) A esperança de X por $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)\, dt$.
2) A variância de X por $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\, dt$.

Proposição 1. *Num conjunto $S = \{a_1, ..., a_N\}$, temos*

1) A quantidade de sequencias de m elementos distintos de S (tais como $(b_1, ..., b_m)$, em que b_1,...,$b_m \in S$ são todos diferentes) é dada por $N(N-1)(N-2)...(N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$. A ideia é que podemos ter N elementos na primeira escolha, $N-1$ na segunda e assim por diante.

2) A quantidade de subconjuntos de m elementos distintos de S (tais como $\{b_1, ..., b_m\}$, em que b_1,...,$b_m \in S$ são todos diferentes) é dada por $\frac{N(N-1)(N-2)...(N-m+1)}{m(m-1)(m-2)....2.1} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = \binom{N}{m}$. A ideia é que a mesma combinação pode aparecer de $m!$ maneiras distintas. Portanto, precisamos dividir por $m!$.

Raciocínios análogos podem ser aplicados em outras situações, tais como a primeira questão dessa prova.