PROVA SUB - MATEMÁTICA 4 (CCM 0223)

PROF: PEDRO T. P. LOPES - WWW.IME.USP.BR/~PPLOPES/MATEMATICA4

A prova é individual e sem consulta (apenas consulte o formulário). Utilize somente resultados dados em sala de aula. Os resultados dados em sala de aula podem (e devem) ser usados sem demonstração.

Boa Prova!

Exercício 1

(1,5 Ponto) a) Calcule $\int_C \frac{-y}{R^2x^2+y^2}dx + \frac{x}{R^2x^2+y^2}dy$, quando C percorre a elipse $R^2x^2 + y^2 = R^2$ no sentido anti-horário em função da constante $R > 0$.

Resolução:

Usaremos o caminho $\gamma(t)(x(t), y(t)) = (cos(t), Rsen(t))$, em que $t \in [0, 2\pi]$. Logo

$$\int_\gamma \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{-Rsen(t)}{R^2cos^2(t) + R^2sen^2(t)}, \frac{cos(t)}{R^2cos^2(t) + R^2sen^2(t)} \right), (-sen(t), Rcos(t)) \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-Rsen(t)}{R^2cos^2(t) + R^2sen^2(t)}(-sen(t)) + \frac{cos(t)}{R^2cos^2(t) + R^2sen^2(t)} Rcos(t) \right] dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{Rsen^2(t) + Rcos^2(t)}{R^2cos^2(t) + R^2sen^2(t)} \right] dt = \frac{2\pi}{R}.$$

(1,5 Ponto) b) 14) Use uma mudança de coordenadas adequada para calcular a integral dupla abaixo:

$$\int\int_S (x-y)^2 sen^2(x+y)\, dxdy,$$

em que S é paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

Resolução: Seja $u = x + y$ e $v = x - y$. Logo $dudv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = 2dxdy$, já que

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2.$$

Assim, obtemos

$$\int\int_S (x-y)^2 sen^2(x+y)\, dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{\tilde{S}} v^2 sen^2(u)\, dudv,$$

em que $\tilde{S}$ é o retângulo (π, π), $(3\pi, \pi)$, $(3\pi, -\pi)$ e $(\pi, -\pi)$. (Para achar a região $\tilde{S}$, primeiro achamos os vértices do polígono. Assim, $(\pi, 0)$ corresponde a $(\pi + 0, \pi - 0) = (\pi, \pi)$, $(2\pi, \pi)$ corresponde a $(2\pi + \pi, 2\pi - \pi) = (3\pi, \pi)$ e assim por diante. Por fim observamos que como a transformação é linear, ela leva semi-reta em semi-reta e, portanto, polígono em polígono).

Continuando as contas, obtemos

$$\frac{1}{2}\int\int_{\tilde{S}} v^2 sen^2(u)\, dudv = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} v^2 \left(\int_{\pi}^{3\pi} sen^2(u)\, du \right) dv = \frac{1}{2}\pi\frac{1}{3}2\pi^3 = \frac{\pi^4}{3}.$$

Note que usamos que $sen^2(t) = \frac{1}{2}(1 - cos(2t))$ para fazer a integral acima.

Exercício 2

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto conexo limitado com fronteira de classe C^1.

(1 Ponto) a) Se u é uma função de classe C^2 definida num aberto que contém $\overline{\Omega}$, calcule $\int\int_{\partial\Omega} \langle \nabla \times u, n \rangle\, dS$.

Resolução:

Vimos em sala de aula que $\nabla.(\nabla \times u) = 0$, sempre que u for de classe C^2. De fato, temos

$$\nabla.(\nabla \times u) = \nabla.\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial y} = 0.$$

Assim, usando o teorema da divergência, obtemos

$$\int\int_{\partial\Omega} \langle \nabla \times u, n \rangle\, dS = \int\int\int_{\Omega} \nabla.(\nabla \times u)\, dx = 0.$$

(1 Ponto) b) Seja $r(x, y, z) = (x, y, z)$ e n a normal que aponta para fora de Ω. Mostre que existe $\lambda > 0$ tal que $\int\int_{\partial\Omega} r.ndS = \lambda vol(\Omega)$, em que $vol(\Omega)$ é o volume do aberto Ω. Determine λ.

Resolução:

Sabemos que

$$\nabla.r = \nabla.(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z = 3.$$

Assim, usando o Teorema da Divergência, obtemos

$$\int\int_{\partial\Omega} r.ndS = \int\int\int_{\Omega} \nabla.rdx = 3\int\int\int_{\Omega} dx = 3vol(\Omega).$$

(1 Ponto) c) Seja $F(x,y,z) = (0,0,x)$ e S a superfície $z = y+5$ com $1 \le x^2+y^2 \le 4$. Seja n o vetor normal a superfície que aponta para baixo. Calcule $\int\int_S \nabla\times F.ndS$.

Resolução: O teorema de Stokes nos diz que

$$\int\int_S \nabla\times F.ndS = \int_{\partial S} F.d\alpha$$

Observamos que a fronteira é composta de duas curvas: α_1 e $\alpha_2 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$. Elas são definidas como $\alpha_1(t) = (cos(t), sen(t), 5+sen(t))$ e $\alpha_2(t) = (2cos(t), 2sen(t), 5+2sen(t))$ (Primeiro parametrizamos $1 \le x^2+y^2 \le 4$ e depois usamos $z = y+5$ para achar as componente z). As integrais são iguais a

$$\int_{\alpha_1} F.d\alpha_1 = \int_0^{2\pi} (0,0,cos(t)).(-sen(t), cos(t), cos(t))dt = \int_0^{2\pi} cos^2(t)dt = \pi$$

$$\int_{\alpha_2} F.d\alpha_2 = \int_0^{2\pi} (0,0,2cos(t)).(-2sen(t), 2cos(t), 2cos(t))dt = 4\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt = 4\pi$$

Note que usamos que $\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1+cos(2t))dt = \pi + \int_0^{2\pi} cos(2t)dt = \pi + 0 = \pi$.

Pela regra da mão direita e pelo fato de n apontar para baixo, temos

$$\int\int_S \nabla\times F.ndS = \int_{\partial S} F.d\alpha = \int_{\alpha_1} F.d\alpha_1 - \int_{\alpha_2} F.d\alpha_2 = \pi - 4\pi = -3\pi.$$

(1 Ponto) d) Calcule a área da superfície $z^2 = 2xy$ que fica entre $0 \le x \le 4$ e $0 \le y \le 3$.

Resolução:

Seja $\varphi(u,v) = (u, v, \sqrt{2uv})$.

Logo a normal é dada por $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \left(1,0,\sqrt{\frac{v}{2u}}\right) \times \left(0,1,\sqrt{\frac{u}{2v}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{v}{2u}}, -\sqrt{\frac{u}{2v}}, 1\right)$. Assim,

$$\acute{A}rea = \int_0^4\int_0^3 \sqrt{1+\frac{v}{2u}+\frac{u}{2v}}dudv = \int_0^4\int_0^3 \sqrt{\frac{2uv+v^2+u^2}{2u}}dudv = \int_0^4\int_0^3 \sqrt{\frac{(u+v)^2}{2u}}dudv$$

$$= \int_0^4\int_0^3 \frac{(u+v)}{\sqrt{2uv}}dudv = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^4\int_0^3 \left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}\right)dudv = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\int_0^4 \sqrt{u}du\right)\left(\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{v}}dv\right) + \left(\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{u}}du\right)\left(\int_0^3 \sqrt{v}dv\right)\right)$$

$$== \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}23^{\frac{1}{2}} + 24^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}}\right) = 2^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}2^3 23^{\frac{1}{2}} + 22\frac{2}{3}33^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\frac{9}{2}}3^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}3^{\frac{1}{2}}\right).$$

Exercício 3

Dois dados são jogados. A cada jogo podemos associar um par em $S = \{(a,b); a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ que corresponde aos resultados do primeiro e segundo jogo. Seja $X : S \to \mathbb{R}$ a variável aleatória dada por $X(a,b) = a+b$.

(2 pontos) a) Calcule $p_k = P(X = k)$ para todo $k \in \{0,1,2,...\}$. Com estes resultados calcule a esperança $E(X)$ e esboce a função de distribuição F_X.

Resolução:

Como temos 36 elementos em S e os dados são não viciados, concluímos que cada jogo tem probabilidade $\frac{1}{36}$.

Note que $\{X=2\} = \{(1,1)\}$ tem um elemento, $\{X=3\} = \{(1,2),(2,1)\}$ tem 2 elementos, $\{X=4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ tem 3 elementos, ..., $\{X=11\} = \{(5,6),(6,5)\}$ tem 2 elementos e $\{X=12\} = \{(6,6)\}$ tem um elemento. Obtemos, então

$p_2 = \frac{1}{36}$, $p_3 = \frac{2}{36}$, $p_4 = \frac{3}{36}$, $p_5 = \frac{4}{36}$, $p_6 = \frac{5}{36}$, $p_7 = \frac{6}{36}$, $p_8 = \frac{5}{36}$, $p_9 = \frac{4}{36}$, $p_{10} = \frac{3}{36}$, $p_{11} = \frac{2}{36}$, $p_{12} = \frac{1}{36}$.

A esperança pode ser calculada pela definição:

$$E(X) = \frac{1}{36}(2\times1+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12\times1)$$

$$= \frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12) = \frac{1}{36}252 = 7.$$

Por fim, a função distribuição é uma função igual a 0 para $x < 2$, igual a 1 para $x \ge 12$. No meio, ela é como uma escada.

(1 ponto) b) Jogamos os dois dados n vezes. Calcule a probabilidade de que, em pelo menos uma das jogadas, obtenhamos $(1,1)$ (os dois dados caem com valor 1). Qual deve ser o menor valor de n para que esta probabilidade seja maior do que $\frac{1}{2}$?

Resolução:

A probabilidade de que não caia $(1,1)$ quando jogamos dois dados é $\left(\frac{35}{36}\right)$. Logo a probabilidade de que não caia $(1,1)$ nas n vezes é dada por $\left(\frac{35}{36}\right)^n$. Assim, a probabilidade de cair $(1,1)$ ao menos uma vez é $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$.

Agora observamos que $1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2} > \left(\frac{35}{36}\right)^n \implies \ln\frac{1}{2} > n\ln\left(\frac{35}{36}\right) \implies n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} = \frac{0{,}3010}{0{,}01223} = 24,6$. Logo n deve ser 25.

Formulário.

Definição 1. Seja $f=(f_1,...,f_n):\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Definimos a integral de linha por

$$\int f.d\alpha=\int f_1dx_1+...+f_ndx_n=\int_a^b f(\alpha(t)).\alpha'(t)\,dt.$$

Seja $g:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Definimos a integral pelo comprimento da curva por

$$\int gds=\int_a^b g(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|\,dt.$$

Definição 2. Seja $Q\subset\mathbb{R}^n$ e $\varphi:Q\to\tilde{Q}$ um difeomorfismo. Seja $f:Q\to\mathbb{R}$ uma função integrável. Logo

$$\int_Q fdx=\int_{\varphi^{-1}(Q)} f\circ\varphi\,|\text{det}d\varphi|\,dx,$$

em que $\det(d\varphi)=\det\left(\frac{\partial\varphi_i}{\varphi x_j}\right)$.

Definição 3. Seja $\varphi:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ uma parametrização e $S=\varphi(\Omega)$. Nestas condições:

1) A área da superfície S é definida como

$$\int\int_\Omega\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|dudv.$$

2) A integral de superfície de uma função $f:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sobre S, em que $S\subset U$, é definida como

$$\int\int_S fdS=\int\int_\Omega f\circ\varphi(u,v)\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\|dudv.$$

3) O fluxo de uma função $f:U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ na direção n, em que $S\subset U$, é definido como $\int\int_S\langle f,n\rangle\,dS$. Portanto, é calculado pela expressão

$$\int\int_\Omega\left\langle f\circ\varphi(u,v),\frac{\partial\varphi}{\partial u}\times\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right\rangle dudv.$$

Teorema 1. *O teorema do divergente nos diz que se $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ é um aberto limitado e conexo e se $\partial\Omega$ for suficientemente regular (de classe C^1, ou cubos, poliedros, semicírculos e etc) e se $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^3$ é de classe C^1, então*

$$\int\int\int_\Omega\nabla.udx=\int\int_{\partial\Omega}\langle u,n\rangle\,dS,$$

em que n é a normal unitária que aponta para fora de Ω.

Teorema 2. *O teorema de Stokes nos diz que se $S\subset\mathbb{R}^3$ é uma superfície de dimensão 2 com bordo suficientemente regular (por exemplos, curvas de classe C^1), e se $u:\Omega\to\mathbb{R}^3$ é uma função de classe C^1, em que $S\subset\Omega\subset\mathbb{R}^3$ e Ω é um aberto, então*

$$\int\int_S\nabla\times u.ndS=\int_{\partial S}u.d\alpha,$$

em que $\int_{\partial S}u.d\alpha$ é a integral de linha sobre o bordo da superfície e n é uma normal unitária da superfície. A integração de linha obedece a regra da mão direita.

Definição 4. Um espaço de probabilidade $(S,\mathcal{B},P)$ consiste de

1) Um conjunto S.

2) Uma σ-álgebra $\mathcal{B}$ de S. A $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ é uma coleção de subconjuntos de S (chamados de eventos) que satisfaz:

a) S e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{B}$.

b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}$, então $\cup_{n=1}^\infty A_n\in\mathcal{B}$.

c) Se $A\in\mathcal{B}$, então $A^c\in\mathcal{B}$.

3) Uma medida de probabilidade $P:\mathcal{B}\to[0,1]$. A medida de probabilidade P é uma função que satisfaz:

a) $P(S)=1$ e $P(\emptyset)=1$.

b) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{B}$ é uma coleção de conjuntos disjuntos, então $P(\cup_{n=1}^\infty A_n)=\sum_{n=1}^\infty P(A_n)$.

No caso em que $S\subset\mathbb{R}^n$ é um aberto, costuma-se tomar como $\mathcal{B}$ a menor σ-álgebra que contém todos os abertos de S. Este conjunto é muito grande e contém também todos os fechados contidos em S.

Definição 5. Seja $(S,\mathcal{B},P)$ um espaço de probabilidade. Dizemos que $X:S\to\mathbb{R}$ é uma variável aleatória se $X^{-1}(]-\infty,t])\in\mathcal{B}$ para todo $t\in\mathbb{R}$. A função distribuição associada a X é a função $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$ definida como $F_X(t)=P(X\leq t)$.

Definição 6. Seja $(S,\mathcal{B},P)$ um espaço de probabilidade e $X:S\to\mathbb{R}$ é uma variável aleatória. Se existe um conjunto enumerável $\{x_1,x_2,...\}$ tais que $p_k=P(X=x_k)>0$ e $\sum_{k=1}^\infty p_k=1$, dizemos que X tem distribuição contínua. Definimos a esperança de X por $E(X)=\sum_{k=1}^\infty x_kp_k$.