REGULARIDADE L^p PARA EQUAÇÕES PARABÓLICAS ABSTRATAS - MINICURSO VERÃO UFSCAR

PEDRO T. P. LOPES

Resumo. Primeira aula do minicurso, ministrado no verão de 2019 no Departamento de Matemática da UFSCar. Nesta aula, falaremos de operadores sectoriais, semigrupos analíticos e definição de regularidade maximal. Veremos que um operador com a propriedade de regularidade maximal gera um semigrupo analítico. Além disso, a regularidade maximal é independente do tempo, desde que este seja finito, e de $p \in (1, \infty)$.

1. Primeira aula.

1.1. Operadores sectoriais e semigrupos. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ e consideremos o seguinte problema:

$$\begin{array}{rcl} u'(t) + Au(t) & = & 0 \\ u(0) & = & u_0 \end{array},$$

em que $u_0 \in \mathbb{C}$. Sabemos que a solução dessa equação é dada por $u(t) = e^{-tA}u_0$. A matriz e^{-tA} é definida usando a série de Taylor da exponencial

$$e^{-tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-tA)^j}{j!}.$$

Como de costume, convencionamos que $A^0 = I$. É interessante notar que se $\sigma(A) \subset B_R(0) = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < R\}$, então

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} e^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda.$$

A integral acima é tomada com o caminho no sentido anti-horário.

De fato, como $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(A) \mapsto (\lambda - A)^{-1} \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ é analítica, a integral acima independe de R, desde que $\sigma(A) \subset B_R(0)$, pelo Teorema de Cauchy. Assim, para $R > \|A\|_{M_{n\times n}(\mathbb{C})}$, temos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} e^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} e^{-t\lambda}\lambda^{-1}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} d\lambda$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!}A^j \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_R(0)} \lambda^{-1-j+k}d\lambda = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-t)^j}{j!}A^j.$$

e retomamos nossa definição original.

Se observarmos que $\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{M_{n\times n}(\mathbb{C})} \le \frac{C}{|\lambda|}$ e que $e^{-t\lambda}$ decai exponencialmente para $t \to \infty$ e $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, então concluímos que para todo conjunto $\Lambda_{c,\theta} = \left\{z \in \mathbb{C};\ z - c = re^{i\phi},\ r > 0,\ -\theta < \phi < \theta\right\}$ tal que $\sigma(A) \subset \Lambda_{\theta,c}$, temos que

$$e^{-tA} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Lambda_{c,\theta}} e^{-t\lambda}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda,$$

em que a integral é tomada de tal forma que o interior de $\Lambda_{c,\theta}$ esteja sempre a esquerda do caminho. A integral acima nos permite generalizar o conceito de exponencial de um operador. Vamos definir os operadores adequados ao nosso estudo. Usaremos a definição $\Lambda_\theta = \Lambda_{0,\theta} = \left\{z \in \mathbb{C};\ z = re^{i\phi},\ r > 0,\ -\theta < \phi < \theta\right\}$.

Definição 1. Seja X um espaço de Banach complexo. Dizemos que um operador fechado e densamente definido $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é sectorial se existe θ tal que:

1) $\sigma(A) \subset \Lambda_\theta$.

2) Existe $C > 0$ tal que $\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \le \frac{C}{1+|\lambda|}$, para todo $\lambda \notin \Lambda_\theta$.

Neste caso, dizemos que $A \in \mathrm{Sect}(\theta)$.

Note que os operadores em $\mathrm{Sect}\,(\theta)$ são sempre inversíveis. Logo, existe $r>0$ tal que $B_r(0)\subset\sigma(A)$, já que o espectro é sempre um conjunto fechado.

Consideremos $H_\epsilon\left(\Lambda_{\tilde\theta}\right)$, $\epsilon>0$, o espaço de todas as funções $f:\Lambda_{\tilde\theta}\to\mathbb{C}$ analíticas tais que $|f(\lambda)|\le C(1+|\lambda|)^{-\epsilon}$. Logo se $A\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$ e $f\in H_\epsilon\left(\Lambda_{\tilde\theta}\right)$ para $\tilde\theta>\theta$, sempre podemos definir uma função $f(A)$ por

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{\theta,r}} f(\lambda)(\lambda-A)^{-1}\,d\lambda,$$

em que

$$\gamma_{\theta,r}=\left\{Re^{i\theta},\infty>R>r\right\}\cup\left\{re^{i\phi},\theta>\phi>-\theta\right\}\cup\left\{Re^{-i\theta},r<R<\infty\right\},$$

em que $r>0$ é qualquer número real tal que $\overline{B_r(0)}\subset\sigma(A)$. Se a função f é analítica numa vizinhança de zero, podemos tomar a região de integração como

$$\gamma_{\theta,0}=\left\{Re^{i\theta},\infty>R>0\right\}\cup\left\{Re^{-i\theta},0<R<\infty\right\}.$$

Exemplo 2. Exemplos de funções importantes são:

1) Se $\mathrm{Re}\,(z)>0$, então $f:\Lambda_\theta\to\mathbb{C}$ dado por $f(\lambda)=\lambda^{-z}$ pertence a $H_\epsilon(\Lambda_\theta)$ para qualquer $\theta\in(0,\pi]$ e $\epsilon<|\mathrm{Re}\,(z)|$. Assim, se $A\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$, sempre podemos definir A^{-z}.

2) Se $\theta<\frac{\pi}{2}$ e $t>0$, então $f:\Lambda_\theta\to\mathbb{C}$ dado por $f(\lambda)=e^{t\lambda}$ pertence a $H_\epsilon(\Lambda_\theta)$ para qualquer $\epsilon>0$. Assim, se $A\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$, $\theta<\frac{\pi}{2}$, sempre podemos definir e^{-tA}.

Definição 3. Dizemos que um operador $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ é gerador de um semigrupo analítico se existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $c+A\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$ para algum $\theta<\frac{\pi}{2}$. Neste caso, definimos:

$$e^{-tA}=e^{tc}e^{-t(c+A)}.$$

O operador e^{-tA} é chamado de semigrupo analítico gerado por A. Convencionamos $e^{0A}=I$.

Observamos que a definição acima independe de $c\in\mathbb{R}$ e de θ, desde que $c+A\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$, para algum $\theta<\frac{\pi}{2}$.

Proposição 4. *(Propriedades de semigrupos analíticos) Seja $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ o gerador de um semigrupo analítico. Logo*

1) $e^{-tA}e^{-sA}=e^{-(t+s)A}$, para todo $t,s>0$.

2) $\lim_{t\to0^+}e^{-tA}x=x$, $\forall x\in X$. (Isto equivale a dizer que $t\in[0,\infty)\mapsto e^{-tA}x$ é contínuo para todo $x\in X$.

3) A função $z\in\Lambda_{\frac{\pi}{2}-\theta}\mapsto e^{-zA}\in\mathcal{B}(X)$ é analítica.

4) Para todo $n\in\mathbb{N}_0$, existe uma constante $C_n>0$, que depende de $n\in\mathbb{N}_0$, e $\delta>0$, que não depende de $n\in\mathbb{N}_0$, tal que $\left\|A^ne^{-tA}\right\|_{\mathcal{B}(X)}\le C_nt^{-n}e^{\delta t}$. Se $A\in Sect(\theta)$, para $\theta<\frac{\pi}{2}$, então podemos escolher δ de tal forma que seja menor do que zero.

Exemplo 5. O operador $-\Delta:H^2_p(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ é gerador de um semigrupo analítico. De fato, para todo $c>0$, temos que $c-\Delta\in\mathrm{Sect}\,(\theta)$, para $\theta<\frac{\pi}{2}$. Isso pode ser provado usando transformada de Fourier.

Neste caso, para $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $t>0$, temos

$$e^{t\Delta}u=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\,dy.$$

1.2. **Problema de Cauchy.** Seja $T\in(0,\infty]$ e $f\in L^1_{loc}((0,\infty);X)$. Vamos considerar o seguinte problema

$$\begin{array}{rcl} u'(t)+Au(t) &=& f(t) \\ u(0) &=& x_0 \end{array}.(PAC)$$

Em geral temos o seguinte teorema de existência e unicidade.

Proposição 6. *Seja $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ um gerador de semigrupo analítico. Logo para cada $f\in L^1_{loc}((0,\infty);X)$ e $x_0\in X$, existe uma única função $u\in C([0,T);X)$ tal que*

1) $\int_0^t u(s)\,ds\in\mathcal{D}(A)$, para todo $t>0$.

2) $u(t)=x_0+A\int_0^t u(s)\,ds+\int_0^t f(s)\,ds$.

Além disso, u é dado pela forma de variação de constantes abaixo:

$$u(t)=e^{-tA}x_0+\int_0^t e^{-(t-s)A}f(s)\,ds=e^{-tA}x_0+k*f(t),$$

em que $*$ indica convolução e $k(t)=e^{-tA}\chi_{[0,\infty)}(t)$.

Observamos abaixo que se $T < \infty$, então u é contínua. Logo automaticamente está em $L^p\left((0,T);X\right)$. Podemos nos perguntar mais: Dado $f \in L^p\left((0,T);X\right)$, quando é que podemos garantir que u' e Au também estejam em $L^p\left((0,T);X\right)$?

Antes vamos lembrar algumas definições. Se $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é fechado e densamente definido, então $\mathcal{D}(A)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x\|_X + \|Ax\|_X .$$

Assim, a norma de $L^p\left(J;\mathcal{D}(A)\right)$, em que $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, é equivalente à norma $u \mapsto \|u\|_{L^p(J;X)} + \|Au\|_{L^p(J;X)}$.

Já $H_p^1\left((0,T);X\right)$ é definido como o espaço de todas as funções tais que $u \in L^p\left((0,T);X\right)$ e

$$u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s)\, ds$$

para uma função $u' \in L^p\left((0,T);X\right)$. Neste caso, dizemos que u' é a derivada de u no sentido de distribuição. De fato, a definição acima implica que

$$\int_0^T u(t)\, \phi'(t)\, dt = -\int_0^T u'(t)\, \phi(t)\, dt,\ \forall \phi \in C_c^\infty\left((0,T);X\right).$$

Uma norma para $H_p^1\left((0,T);X\right)$ é dada por $u \mapsto \|u\|_{L^p(J;X)} + \|u'\|_{L^p(J;X)}$. Nesse caso, $H_p^1\left((0,T);X\right)$ é um espaço de Banach.

Vmos usar frequentemente o seguinte espaço $MR_p\left((0,T);X.Y\right) := H_p^1\left((0,T);X\right) \cap L^p\left((0,T);Y\right)$, em que $Y \subset X$ e X e Y são espaços de Banach. O espaço $MR_p\left((0,T);X.Y\right)$ é um espaço de Banach com a norma:

$$\|u\|_{MR_p((0,T);X.Y)} = \|u\|_{H_p^1((0,T);X)} + \|u\|_{L^p((0,T);Y)} .$$

Podemos, enfim, definir regularidade maximal.

Definição 7. Dizemos que um operador fechado e densamente definido $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ tem a propriedade de regularidade maximal L^p para $T \in (0,\infty]$ se para todo $f \in L^p\left((0,T);X\right)$ e $x_0 = 0$ existe uma única função $u \in MR_p\left((0,T);X,\mathcal{D}(A)\right)$ que resolve (para quase todo $t > 0$) a equação (PAC). Denotamos o conjunto desses operadores por $\mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$

Proposição 8. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador fechado e densamente definido.*

1) Se $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p\left((0,T);X\right)$, a solução u satisfaz

$$\|u\|_{MR_p((0,T);X,\mathcal{D}(A))} \leq C\, \|f\|_{L^p((0,T);X)} .$$

2) Se $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$, então A é o gerador de um semigrupo analítico. E a solução $u \in MR_p\left((0,T);X,\mathcal{D}(A)\right)$ é dada por $\int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds$.

3) Se $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$, $T \in (0,\infty]$, então $A \in \mathcal{MR}_p\left(\left(0,\tilde{T}\right);X\right)$ para todo $\tilde{T} \in (0,\infty)$. Além disso, se $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$, $T \in (0,\infty)$, então $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,\infty);X\right)$ se, e somente se, $A \in Sect(\theta)$, $\theta < \frac{\pi}{2}$.

4) Se $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,T);X\right)$ para $p \in (1,\infty)$, então $A \in \mathcal{MR}_q\left((0,T);X\right)$ para todo $q \in (1,\infty)$.

Demonstração. (Ideia da prova de 1, 2 e 3)

1) Mostre que a aplicação $\mathcal{U} : L^p\left((0,T);X\right) \to MR_p\left((0,T);X,\mathcal{D}(A)\right)$ que leva $f \in L^p\left((0,T);X\right)$ na solução u do problema (PCA) é fechada. Logo pelo teorema do gráfico fechado, $\mathcal{U}$ é contínua.

2) No caso em que $T = \infty$, então basta mostrar que $(\lambda - A)^{-1} = \mathrm{Re}(\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathcal{U}(f_\lambda x)(s)\, ds$, em que $f_\lambda(t) = \chi_{\left[0,\frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\right]}(t)\, e^{\lambda t}$, para $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Algumas considerações nos levarão a concluir que

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{C}{1+|\lambda|},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

3) Se $\tilde{T} < T$ usamos argumento de extensão e restrição de funções. Para $\tilde{T} > T$, quebramos $\left[0,\tilde{T}\right)$ em intervalos menores. $\square$

Vamos agora dar mais ênfase a demonstração de 4, em que o uso de resultados de análise harmônica se torna crucial. Vamos nos restringir ao caso em que $A \in \mathcal{MR}_p\left((0,\infty);X\right)$. O caso em que $T < \infty$, segue desse após pequenas considerações.

Vamos antes de mais nada considerar um operador $A \in \text{Sect}(\theta)$, $\theta < \frac{\pi}{2}$. Sabemos que $\left\|e^{-tA}\right\|_{\mathcal{B}(X)} \leq Ce^{-\delta t}$, em que $\delta > 0$. Logo $t \in (0,\infty) \mapsto e^{-tA} \in \mathcal{B}(X)$ é integrável. Para $f \in L^p((0,\infty);X)$ e $x_0 = 0$, a solução do (PCA) é dada por

$$u(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds = k * f(t),$$

em que $k(t) = e^{-tA}\chi_{[0,\infty)}(t)$.

Pela desigualdade de Young, é claro que $u \in L^p((0,\infty);X)$. Assim, dizer que $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$ é o mesmo que dizer que $Au \in L^p((0,\infty);X)$, para todo $f \in L^p((0,\infty);X)$. De fato, isto nos diz que $u \in L^p((0,\infty);\mathcal{D}(A))$ e, portanto, $u' = f - Au$ também pertencerá a $L^p((0,\infty);X)$. Desta forma, $u \in MR_p((0,T);X,\mathcal{D}(A))$.

Assim, temos $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$ se, e somente se,

$$t \in (0,\infty) \mapsto A\int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds \in L^p((0,\infty);X).$$

Com um pouco mais de cuidado, podemos concluir o seguinte:

Proposição 9. *Seja $A \in Sect(\theta)$, $\theta < \frac{\pi}{2}$. Logo as seguintes afirmações são equivalentes:*
1) $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$.
2) O operador $T : C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\};\mathcal{D}(A)) \to C((0,\infty);X)$ abaixo tem uma única extensão em $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R};X))$:

$$Tf(t) = A\left(\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} f(s)\,ds\right) = \int_{-\infty}^t Ae^{-(t-s)A} f(s)\,ds = k_A * f(t),$$

em que $k_A(t) = Ae^{-tA}\chi_{[0,\infty)}(t)$. Na segunda igualdade, usamos que $s \mapsto Ae^{-(t-s)A}f(s)$ é integrável, já que o suporte de f não contém a origem.

Assim, como $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$, então $T \in \mathcal{B}(L^p((0,\infty);X))$. Nosso objetivo é mostrar que $T \in \mathcal{B}(L^q((0,\infty);X))$ para todo $q \in (1,\infty)$. Isto implicará que $A \in \mathcal{MR}_q((0,\infty);X)$ pela Proposição anterior.

Para tanto vamos usar o seguinte Teorema.

Teorema 10. *(Teorema de Benedek, Calderón e Panzone) Sejam X e Y espaços de Banach complexos, $1 < p < \infty$ e $T : L^p(\mathbb{R}^n;X) \to L^p(\mathbb{R}^n;Y)$ um operador limitado. Suponha que*
1) Existe uma função $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\},\mathcal{B}(X,Y))$ tal que para todo $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n,X)$ com suporte compacto, temos

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x-y) f(y)\,dy, \text{ para quase todofor almost every } x \notin supp(f).$$

2) A função k satisfaz a condição de Hörmander

$$\int_{|x|>2|y|} \|k(x-y) - k(x)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\,dx \leq B_K,\ \forall y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}.$$

Nessas condições, para todo $1 < q < \infty$, o operador $T|_{L^p(\mathbb{R}^n;X)\cap L^q(\mathbb{R}^n;X)}$ estende a um operador linear contínuo $T : L^q(\mathbb{R}^n;X) \to L^q(\mathbb{R}^n;Y)$.

Demonstração. A ideia da prova é a seguinte:

1) Primeiramente, olhamos para $p = 1$. O teorema não diz que T tem uma extensão contínua para funções em L^1 e em geral isso não é verdade. No entanto, podemos achar um espaço maior, chamado L^1 fraco, $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n;X)$, tal que as condições do teorema impliquem que T tem uma extensão limitada como um operador de $L^1(\mathbb{R}^n;X)$ em $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n;X)$. Essa limitação é provada usando a decomposição de Calderón-Zygmund.

2) Depois provamos que T tem uma extensão em $\mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^n;X),L^q(\mathbb{R}^n;Y))$ para todo $1 < q < p$. A ideia é começar com o fato de que $T \in \mathcal{B}\left(L^1(\mathbb{R}^n;X),L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n;Y)\right) \cap \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n;X),L^p(\mathbb{R}^n;Y))$. Para preencher o intervalo entre 1 e p usamos o teorema de interpolação de Marcinkiewicz.

3) Finalmente, usando argumento de dualidade, mostramos que T tem uma extensão em $\mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^n;X),L^q(\mathbb{R}^n;Y))$, para todo $q > p$.

Os itens 1 e 2 são provados essencialmente da mesma forma que o caso escalar. O item 3 é mostrado de aneira semelhante, mas não igual, já que em geral $L^{q^*}(\mathbb{R}^n;X^*)$, X^* o dual de X, pode ser identificado com apenas um subconjuto fechado (mas não igual) a $(L^q(\mathbb{R}^n;X))^*$. Note que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q^*} = 1$. □

Agora basta aplicar o teorema acima à função $k : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathcal{B}(X)$ dada por

$$k(t) = \begin{cases} Ae^{tA},\ t > 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases}.$$

A função acima é contínua fora de 0. Assim, basta mostrar que ela satisfaz a condição de Hörmander.. De fato, para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\int_{|t|>2|s|} \|k(t-s) - k(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \, dt \leq \int_{t>2|s|} \|k(t-s) - k(t)\|_{\mathcal{B}(X)} = \int_{t>2|s|} \left\| Ae^{(t-s)A} - Ae^{tA} \right\|_{\mathcal{B}(X)} dt$$

$$= \int_{t>2|s|} \left\| \int_t^{t-s} A^2 e^{\tau A} d\tau \right\|_{\mathcal{B}(X)} dt \leq \int_{t>2|s|} \left(\int_t^{t-s} \|A^2 e^{\tau A}\|_{\mathcal{B}(X)} \, d\tau \right) dt \leq \int_{t>2|s|} \left| \int_t^{t-s} \frac{1}{\tau^2} d\tau \right| dt$$

$$\leq \int_{t>2|s|} \left| \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t} \right| dt.$$

Se $s > 0$, então

$$\int_{t>2|s|} \left| \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t} \right| dt = \int_{2s}^{\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t-s} \right) dt = \left(\ln(t) - \ln(t-s)\right)\Big|_{2s}^{\infty} = \ln\left(\frac{t}{t-s} \right)\Bigg|_{2s}^{\infty} = \ln(2).$$

Se $s = 0$, então a integral acima é igual a zero.
Se $s < 0$, então

$$\int_{t>2|s|} \left| \frac{1}{t-s} - \frac{1}{t} \right| dt = \int_{-2s}^{\infty} \left(\frac{1}{t-s} - \frac{1}{t} \right) dt == \left(\ln(t-s) - \ln(t)\right)\Big|_{-2s}^{\infty} = \ln\left(\frac{t-s}{t} \right)\Bigg|_{-2s}^{\infty} = \ln\left(\frac{3}{2} \right).$$

Concluímos que

$$\int_{|t|>2|s|} \|k(t-s) - k(t)\|_{\mathcal{B}(X)} \, dt \leq C \ln(2).$$

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, 05508-090, São Paulo, S.P., Brasil.

E-mail address: pplopes@ime.usp.br