REGULARIDADE L^p PARA EQUAÇÕES PARABÓLICAS ABSTRATAS - MINICURSO VERÃO UFSCAR

PEDRO T. P. LOPES

Resumo. Segunda aula do minicurso, ministrado no verão de 2019 no Departamento de Matemática da UFSCar. Nesta aula, falaremos de métodos e teoremas usados para mostrar regularidade maximal. Nos concentraremos em apenas duas abordagens. A primeira usa multiplicadores de Fourier. A segunda busca achar inversa da soma de operadores fechados.

1. Segunda aula.

1.1. **Problema: Como provar que um operador tem propriedade de regularidade maximal?** Vamos começar recordando as definições da aula passada. Dizemos que um operador $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ fechado e densamente definido pertence a $\mathcal{MR}_p((0,T);X)$ se para toda função $f \in L^p((0,T);X)$, existe uma única função $u \in MR_p(0,T;X.\mathcal{D}(A))$ que resolve $u'(t) + Au(t) = f(t)$, para todo $t \in (0,T)$ e $u(0) = 0$.

Como podemos saber então que A possui essa propriedade? Primeiramente A deve ser um gerador de semigrupo analítico. Logo existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c + A$ é sectorial. Podemos provar também que

Lema 1. *Seja $A \in \mathcal{MR}_p((0,T);X)$, $p \in (1,\infty)$ e $T \in (0,\infty]$. Logo $A \in \mathcal{MR}_p((0,T);X)$ se, e somente se, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $c + A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$.*

O lema acima permite que nós reduzirmos o estudo aos operadores sectoriais. nossa pergunta é: Achar condições para que um operador sectorial pertença a $\mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$.

Vamos apresentar suas abordagens.

1.2. **O uso de multiplicadores de Fourier.**

Definição 2. Seja X um espaço de Banach complexo. Definimos $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;X) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;X)$ por

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x)\, dx \ \text{ e } \ \mathcal{F}^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(\xi)\, d\xi,$$

em que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n;X) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n;X);\ \left\| x^\alpha \partial_x^\beta u(x) \right\|_X \le C_{\alpha\beta} \right\}$.

Observamos que $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}^{-1}$ são bijeções e inversas uma da outra. Essas funções também se estendem a operadores lineares contínuos em $\mathcal{B}\left(L^1(\mathbb{R}^n;X), L^\infty(\mathbb{R}^n;X)\right)$.

Exemplo 3. Seja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\};\mathcal{D}(A))$ e $u(t) = A\int_{-\infty}^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds$. Logo

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} A (i\xi + A)^{-1} \hat{u}(\xi)\, d\xi.$$

Demonstração. Seja $k(s) = \chi_{[0,\infty)}(s) e^{-sA}$. Logo $\|k(s)\|_{\mathcal{B}(X)} \le Ce^{-\delta s}\chi_{[0,\infty)}(s)$. Portanto é integrável.

Vemos que

$$\int_{-\infty}^t Ae^{-(t-s)A} f(s)\, ds = \int_{-\infty}^t Ae^{-(t-s)A} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{is\tau} \hat{f}(\tau)\, d\tau \right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty k(t-s) e^{is\tau} A\hat{f}(\tau)\, d\tau \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{is\tau} k(t-s)\, ds \right) A\hat{f}(\tau)\, d\tau.$$

Mas

$$\int_{-\infty}^\infty e^{is\tau} \chi_{[0,\infty)}(t-s) e^{-(t-s)A} ds = \int_{-\infty}^t e^{is\tau} e^{-(t-s)A} ds = \int_0^\infty e^{it\tau} e^{-s(A+i\tau)} ds$$

$$= -e^{it\tau} \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^\infty \frac{d}{ds} \left[(A+i\tau)^{-1} e^{-s(A+i\tau)} \right] ds = e^{it\tau} (A+i\tau)^{-1}.$$

Logo

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{it\tau} A (A+i\tau)^{-1} \hat{f}(\tau)\, d\tau.$$

$\square$

Observação 4. Um multiplicador de Fourier é um operador da forma $op(m)\,u(x) = \mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}u)(x)$, ou seja,

$$op(m)\,u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} m(\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi,$$

em que m é chamado de símbolo do multiplicador.

Corolário 5. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador sectorial de ângulo $< \frac{\pi}{2}$. Logo equivalem:*
1) $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$.
2) $op(m) : C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\};\mathcal{D}(A)) \to C(\mathbb{R}\backslash\{0\};X)$ se estende a um operador em $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R};X))$, em que $m(\xi) = A(A+i\xi)^{-1}$.

Demonstração. Basta observar que $k_A * f = op(m)\,f$, $k(s) = \chi_{[0,\infty)}(s)\,Ae^{-sA}$, para todo $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\};\mathcal{D}(A))$. $\square$

Teorema 6. *(de Simon) Seja H um espaço de Hilbert. Logo $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ é gerador de um semigrupo analítico se, e somente se, $A \in \mathcal{MR}_p((0,T);X)$ para algum $p \in (1,\infty)$ e $T \in (0,\infty]$.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) Já vimos ontem que se um operador tem propriedade de regularidade maximal, então ele é um gerador de semigrupo analítico.

($\Longrightarrow$) Basta mostrar que se A é sectorial com ângulo $< \frac{\pi}{2}$, então $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);X)$. Usaremos os seguintes fatos:

1) Se H é um espaço de Hilbert, então $L^2(\mathbb{R},H)$ também é. Além disso,

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R},H)} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), g(t)\rangle_H\,dt.$$

2) Se H é um espaço de Hilbert, vale o Teorema de Plancherel (mesma demostração do caso escalar). Para todos $u,v \in L^2(\mathbb{R},H)$, temos

$$\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v\rangle_{L^2(\mathbb{R},H)} = (2\pi)^n \langle u,v\rangle_{L^2(\mathbb{R},H)}.$$

Assim, como $A(A+i\xi)^{-1} = I - i\xi(A+i\xi)^{-1}$, concluímos que $\left\|A(A+i\xi)^{-1}\right\|_{\mathcal{B}(H)} \le C$. Logo

$$\begin{aligned}\|op(m)\,f\|_{L^2(\mathbb{R},H)} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)\right\|_{L^2(\mathbb{R},H)} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|m\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R},H)}\\ &\le C(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R},H)} = C\|f\|_{L^2(\mathbb{R},H)}.\end{aligned}$$

Concluímos que $op(m) \in \mathcal{B}\left(L^2(\mathbb{R};H)\right)$. Assim, $A \in \mathcal{MR}_2((0,\infty);H)$ e, portanto, $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty);H)$, para todo $p \in (1,\infty)$. $\square$

Exemplo 7. Consideremos a equação do calor:

$$\begin{array}{rcl}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) &=& f(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n\\ u(0,x) &=& 0\end{array}.$$

Sabemos que $-\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é gerador de um semigrupo analítico (é auto-adjunto e positivo). Logo $-\Delta \in \mathcal{MR}_p((0,T);X)$ para todo $T \in (0,\infty)$ e $p \in (1,\infty)$. Logo dado $f \in L^p\left(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)\right)$, existe uma única solução da equação pertencente a $H_p^1\left((0,T);L^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap L^p\left((0,T);H^2(\mathbb{R}^n)\right)$.

1.2.1. *Caso em que X não é espaço de Hilbert, mas é um espaço UMD.*. No caso em que X não é um espaço de Hilbert, $L^2(\mathbb{R};X)$ é um espaço de Banach, mas não podemos dizer que ele é de Hilbert, já que o produto interno definido anteriormente não faz sentido. Pior ainda: O teorema de Plancherel não válido. Logo o argumento anterior não vale.

No entanto, desde o começo deste milênio, se conhece uma caracterização dos operadores que têm a propriedade de regularidade maximal L^p em espaços de Banach UMD. Ela é devida a Lutz Weis.

Vamos antes definir esses espaços.

Definição 8. Dizemos que X é um espaço UMD se o multiplicador de Fourier $op(h)$, com símbolo $h(\xi) = -i\text{sign}(\xi)$ se estende a um operador em $\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R};X))$ para algum (e portanto para todos) $p \in (1,\infty)$.

Exemplo 9. Exemplos de espaços UMD são muitos. Para $p,q \in (1,\infty)$ e $s \in \mathbb{R}$, os seguintes espaços são UMD: $L^p(\Omega)$, $H_p^s(\Omega)$, $B_{pq}^s(\Omega)$ e $F_{pq}^s(\Omega)$. Os espaços UMD são sempre reflexivos. Logo $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ e $C^\alpha(\Omega)$ não são reflexivos.

Definição 10. Dizemos que uma coleção de operadores $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(X)$ é R-limitada se existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) T_j x_j \right\|_X dt \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) x_j \right\|_X dt,$$

para todo $x_1, ..., x_N \in X$, $T_1, ..., T_N \in \mathcal{B}(X)$ e $N \in \mathbb{N}_0$. Acima $r_j(t) = \text{sign}\left(\sin\left(2^j \pi t\right)\right)$ são as chamadas funções de Rademacher.

Teorema 11. *Seja X um espaço de Banach UMD, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador sectorial com ângulo $< \frac{\pi}{2}$. Logo $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty); X)$ se, e somente se, $\{A(i\xi - A); \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{B}(X)$ é R-limitado.*

Para a prova desse teorema usamos o seguinte teorema:

Teorema 12. *(L. Weis); Seja $m \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\}; \mathcal{B}(X))$ tal que $\left\{\xi^k \frac{d^k m}{d\xi^k}(\xi); \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, k = 0, 1\right\}$ é R-limitado. Logo $op(m) \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}; X))$ para todo $p \in (1,\infty)$.*

Exemplo 13. O multiplicador com símbolo $m(\xi) = A(i\xi + A)^{-1}$ é um símbolo na classe do Teorema anterior.

1.3. **Inversa da soma de operadores fechados.** Outra técnica para provar regularidade maximal consiste na seguinte observação: Se $t > 0$, então

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{t^{-s}}{\sin(\pi s)} ds, \ c \in (0,1).$$

A expressão acima é obtida via transformada de Mellin. Lembramos que a transformada de Mellin é definida como

$$\mathcal{M}(f)(z) = \int_0^\infty t^{z-1} f(t)\, dt \ \text{ e } \ \mathcal{M}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} x^{-z} f(z)\, dz.$$

Podemos mostrar que $\mathcal{M}\left(\frac{1}{1+t}\right)(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, de onde segue nossa expressão. Note que se a e b são maiores do que 0, então

$$\frac{1}{a+b} = b^{-1} \frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\right)} = b^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{\pi\left(\frac{b}{a}\right)^{-z}}{\sin(\pi z)} dz = \frac{1}{2i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{a^{-z} b^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz.$$

Logo

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{2i} \int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{a^{-z} b^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz.$$

Vamos agora ver como isso pode nos ajudar.

Seja $p \in (1,\infty)$, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador sectorial com ângulo $< \frac{\pi}{2}$. Vamos definir os seguintes operadores: (abaixo, ${}_0H_p^1$ são as funções em H_p^1 que se anulam em 0).

$$\mathcal{B} : {}_0H_p^1((0,\infty); X) \subset L^p(0,\infty; X) \to L^p(0,\infty; X), \ \mathcal{B}(u) = \frac{du}{dt},$$
$$\mathcal{A} : L^p((0,\infty); \mathcal{D}(A)) \subset L^p(0,\infty; X) \to L^p(0,\infty; X), \ \mathcal{A}(u)(t) = Au(t).$$

Assim, $\mathcal{A}+\mathcal{B} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset L^p(0,\infty; X) \to L^p(0,\infty; X)$ é dado por $(\mathcal{A}+\mathcal{B})(u) = u' + Au$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{B}) = H_p^1((0,\infty); X) \cap L^p((0,\infty); \mathcal{D}(A))$. Assim, concluímos que

Proposição 14. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador sectorial com ângulo $< \frac{\pi}{2}$. Logo equivalem:*
1) $A \in \mathcal{MR}_p(0,\infty; X)$.
2) $\mathcal{A}+\mathcal{B} : \mathcal{D}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \subset L^p((0,\infty); X) \to L^p((0,\infty); X)$ é invertível.

Definição 15. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador sectorial. Definimos

$$\mathcal{D}\left(A^{it}\right) = \left\{x \in X; \exists \lim_{z \to it,\, \text{Re}(z)<0} A^z x\right\}.$$

O operador $A^{it} : \mathcal{D}\left(A^{it}\right) \subset X \to X$ é definido como $A^{it} := \lim_{z \to it,\, \text{Re}(z)<0} A^z x$. Dizemos que A tem potências imaginárias complexas limitadas se para todo $t \in \mathbb{R}$, temos $\mathcal{D}\left(A^{it}\right) = X$ e $A^{it} \in \mathcal{B}(X)$. Neste caso, existe $C > 0$ e $\theta > 0$ tal que

$$\left\|A^{it}\right\| \leq Ce^{\theta|t|}.$$

Neste caso, dizemos que $A \in \mathcal{BIP}(\theta)$.

Teorema 16. *Seja X um espaço de Banach UMD e $A \in Sect(\theta) \cap \mathcal{BIP}(\theta)$ para algum $\theta < \frac{\pi}{2}$. Logo $A \in \mathcal{MR}_p((0,\infty); X)$.*

Demonstração. A ideia da prova é:

1) Mostramos que $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}u = \frac{du}{dt}$, pertence a $\mathcal{BIP}(\phi)$, para todo $\phi > \frac{\pi}{2}$.
2) Mostramos que $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A}u)(t) = Au(t)$, pertence a $\mathcal{BIP}(\theta)$.
3) Mostramos que, para $c \in (0,1)$, temos

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{-1} = \frac{1}{2i}\int_{c-\infty}^{c+\infty} \frac{\mathcal{A}^{-z}\mathcal{B}^{z-1}}{\sin(\pi z)} dz.$$

□

Exemplo 17. O laplaciano $-\Delta : H_p^2(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é tal que $1-\Delta \in \mathrm{Sect}(\theta)$ para todo $\theta < \frac{\pi}{2}$. Podemos assim, mostrar que $(1-\Delta)^{it} = \mathcal{F}^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{it}\mathcal{F}$ é limitado por Miklin. De fato,

$$\left|\partial_\xi^\alpha \left(1+|\xi|^2\right)^{it}\right| \le C_\alpha \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{|\alpha|}{2}}.$$

Assim, para cada $f \in L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^n))$, $T \in (0,\infty)$, $p,q \in (1,\infty)$, existe uma única função $u \in H_p^1(0,T;L^q(\mathbb{R}^n)) \cap L^p\left(0,T,H_q^2(\mathbb{R}^n)\right)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) & = & f(t,x),\ t>0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) & = & 0 \end{array}.$$

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, 05508-090, São Paulo, S.P., Brasil.

E-mail address: pplopes@ime.usp.br