REGULARIDADE L^p PARA EQUAÇÕES PARABÓLICAS ABSTRATAS - MINICURSO VERÃO UFSCAR

PEDRO T. P. LOPES

Resumo. Terceira aula do minicurso, ministrado no verão de 2019 no Departamento de Matemática da UFSCar. Nesta aula, iniciaremos considerando o problema de Cauchy com valor inicial não nulo. A seguir apresentaremos duas aplicações da regularidade maximal. Apresentaremos um teorema de existência e unicidade de equações quasilineares, usando o teorema do ponto fixo de Banach. Depois mostraremos um teorema de regularidade, usando o teorema da função implícita.

1. Terceira aula.

1.1. **Problemas de Cauchy com valores iniciais não nulos.** Vamos considerar agora o seguinte problema

$$\begin{array}{rcl} u'(t)+Au(t) & = & f(t),\, t\in(0,T) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}.$$

Se $f\in L^p(0,T;X)$ e $A\in\mathcal{MR}_p(0,T;X)$, quais são os valores de u_0 para que a solução pertença a $H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))$?

Note que como $H^1_p(0,T;X)\hookrightarrow C([0,T];X)$, a condição inicial $u(0)$ está bem definida. Para entender esse problema, vamos definir o espaço traço.

Definição 1. O espaço traço $Tr_p(X,\mathcal{D}(A))$ é o espaço dos elementos $x\in X$ para os quais existe $u\in H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))$ tal que $u(0)=x$. O espaço $Tr_p(X,\mathcal{D}(A))$ é um espaço de Banach com a seguinte norma:

$$\|x\|_{Tr_p(X,\mathcal{D}(A))}:=\left\{\|u\|_{H^1_p(0,T;X)}+\|u\|_{L^p(0,T;\mathcal{D}(A))};\, u\in H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A)) \text{ e } u(0)=x\right\}.$$

Proposição 2. *Seja X um espaço de Banach e $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ o gerador de um semigrupo analítico. Logo*

1) $Tr_p(X,\mathcal{D}(A))$ é um espaço de Banach tal que $\mathcal{D}(A)\hookrightarrow Tr_p(X,\mathcal{D}(A))\hookrightarrow X$ e as inclusões são contínuas.

2) $H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))\hookrightarrow C([0,T];Tr_p(X,\mathcal{D}(A)))$ continuamente. Além disso, existe uma constante $C>0$ tal que, para todo $T\in\mathbb{R}$, temos

$$\|u\|_{C([0,T];Tr_p(X,\mathcal{D}(A)))}\le C\left(\|u\|_{H^1_p(0,T;X)}+\|u\|_{L^p(0,T;\mathcal{D}(A))}\right),$$

sempre que $u\in H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))$ seja tal que $u(0)=0$.

3) $Tr_p(X,\mathcal{D}(A))=(X,\mathcal{D}(A))_{1-\frac{1}{p},p}$ é o espaço de interpolação real.

Exemplo 3. Para o Laplaciano, temos $X=L^q(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{D}(A)=H^2_q(\mathbb{R}^n)$. Logo $Tr_p(X,\mathcal{D}(A))=\left(L^q(\mathbb{R}^n),H^2_q(\mathbb{R}^n)\right)_{1-\frac{1}{p},p}=B^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}_{qp}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço de Besov.

Se $p=q=2$, temos $B^1_{22}(\mathbb{R}^n)=H^1(\mathbb{R}^n)$.

Em geral, se $\theta\in(0,1)$ e $p=q=2$, temos

$$\|u\|_{B^\theta_{pp}(\mathbb{R}^n)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+\theta p}}dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 4. *Seja $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ um operador fechado e densamente definido. Logo equivalem:*

1) $A\in\mathcal{MR}_p(X)$

2) Seja $\gamma_0:H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))\to Tr_p(X,\mathcal{D}(A))$ a aplicação $\gamma_0(u)=u(0)$. Neste caso, o operador

$$\begin{pmatrix}\partial_t+A\\ \gamma_0\end{pmatrix}:H^1_p(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))\to\begin{array}{c}L^p(0,T;X)\\ \oplus\\ Tr_p(X,\mathcal{D}(A))\end{array}$$

é um isomorfismo.

Exemplo 5. Consideremos a equação do calor:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \Delta u(t,x) & = & f(t,x),\ t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) & = & 0 \end{array}.$$

Logo para todo $f \in L^p(0,T;L^q(\mathbb{R}^n))$ e $u_0 \in B_{qp}^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}$, existe uma única solução da equação acima pertencente a $H_p^1(0,T;L^q(\mathbb{R}^n)) \cap L^p\left(0,T;H_q^2(\mathbb{R}^n)\right)$.

1.2. **Aplicações: Teorema de existência e unicidade de equações quasilineares.** Consideremos X e Y espaços de Banach tais que $Y \hookrightarrow X$, e $A:(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p} \to \mathcal{B}(X,Y)$ uma função contínua. Consideremos a equação

$$\begin{array}{rcl} u'(t) + A(u(t))\,u(t) & = & 0,\ t\in(0,T) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}.$$

Exemplo 6. Um exemplo é a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u \partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\right)\partial_i\partial_j u = 0\ \ u(0) = u_0.$$

Aqui, $A(u) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i u\partial_j u}{1+|\nabla u|^2}\right)\partial_i\partial_j$, $Y = H_p^2(\mathbb{R}^n)$, $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ e $(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p} = B_{pp}^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^n)$. Se $p > n+2$, então $B_{pp}^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_b^1(\mathbb{R}^n)$ e a equação está bem definida. (Aqui é importante usarmos $p \neq 2$).

Vamos assumir que A é localmente Lipschitz, isto é, para todo $R>0$, existe uma constante $C_R>0$ tal que

$$\|A(u) - A(v)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \leq C_R\|u-v\|_{(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}}.$$

Nestas condições temos o seguinte teorema:

Teorema 7. *(Clement-Li) Se $x_0 \in (X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}$ e $A(u_0): Y\subset X \to X \in \mathcal{MR}_p\left(0,\overline{T};X\right)$, $\overline{T}\in(0,\infty]$, então existe $T>0$ e uma única função $u \in H_p^1(0,T;X)\cap L^p(0,T;\mathcal{D}(A))$ que resolve*

$$\begin{array}{rcl} u'(t) + A(u(t))\,u(t) & = & 0,\ t\in(0,T) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}.$$

Demonstração. Podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} u'(t) + A(u_0)\,u(t) & = & (A(u_0) - A(u(t)))\,u(t),\ t\in(0,T) \\ u(0) & = & u_0 \end{array}.$$

Seja

$$L = \left(\begin{array}{c} \partial_t + A(u_0) \\ \gamma_0 \end{array}\right)^{-1} : L^p(0,T;X)\times(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p} \to L^p(0,T;Y)\cap H_p^1(0,T;X).$$

Logo u é solução se, e somente se,

$$u(t) = L\left(\begin{array}{c} (A(u_0) - Au(t))\,u(t) \\ x_0 \end{array}\right) = \Phi(u(t)).$$

Assim, o problema consiste em achar um ponto fixo da aplicação

$$\Phi: L^p(0,T;Y)\cap H_p^1(0,T;X) \to L^p(0,T;Y)\cap H_p^1(0,T;X).$$

Note que definindo $G: L^p(0,T;Y)\cap H_p^1(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ por $G(u) = (A(u_0) - Au(t))\,u(t)$, vemos que

$$\Phi(u) = L\left(\begin{array}{c} G(u)(t) \\ u_0 \end{array}\right).$$

Para tanto, vamos usar o Teorema do ponto fixo de Banach. Seja $u^* = L\left(\begin{array}{c} 0 \\ u_0 \end{array}\right)$. Logo $u^*(t) = e^{-A(u_0)t}u_0$. Vamos denotar por $MR_p = L^p(0,T;Y)\cap H_p^1(0,T;X)$ e por $\|.\|_{MR_p}$ a norma desse espaço. Definiremos

$$B_{r,T}(0) = \left\{v\in MR_p;\ v(0) = u_0,\ \|v-u^*\|_{MR_p} \leq r\right\}.$$

Vamos mostrar que para r e T suficientemente pequeno $\Phi: B_{r,T}(0)\to B_{r,T}(0)$ é uma contração e está bem definido (ou seja, $\Phi(B_r(0))\subset B_r(0)$).

Seja $M>0$ tal que

$$\|u\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq M\|u\|_{MR_p},$$

para todo $u \in L^p(0,T;Y) \cap {}_0H^1_p(0,T;X)$ e $T > 0$.

Primeiro, observamos que para $u \in B_{r,T}$, temos

$$\|u(t) - x_0\|_{C\left([0,T](X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq \|u - u^*\|_{C\left([0,T],(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} + \|u^* - x_0\|_{C\left([0,T],(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)}$$
$$\leq M\|u - u^*\|_{MR_p} + \|u^* - x_0\|_{C\left([0,T],(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq Mr + \phi(T),$$

em que $\phi(T) = \|u^* - x_0\|_{C\left([0,T],(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)}$.

Logo $\|u(t) - u_0\|_{(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}} \leq R$ para algum $R = M + \phi(1)$, sempre que $u \in B_{r,T}$ para $r = 1$ e $T = 1$. Seja $C_L > 0$ uma constante tal que para $\|x - u_0\|_{(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}} \leq R$ e $\|y - u_0\|_{(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}} \leq R$

$$\|A(x) - A(y)\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq C_L\|x - y\|_{(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}}.$$

Para demonstrar o teorema, precisamos mostrar que sempre podemos achar $0 < r < 1$ e $0 < T < 1$ tal que Φ leva funções de $B_{r,T}$ em $B_{r,T}$, isto é, $\Phi : B_{r,T} \to B_{r,T}$ e tal que $\Phi : B_{r,T} \to B_{r,T}$ é uma contração. Para tanto, vamos estimar $\|\Phi(v) - u^*\|_{MR_p}$ e $\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{MR_p}$.

1) Vamos estimar

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{MR_p} \leq \|L\|\|G(v)\|_{L^p(0,T;X)} \leq \|L\| \max_{t\in[0,T]} \|A(v(t)) - A(u_0)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \|v\|_{L^p(0,T;Y)}$$
$$\leq \|L\| C_L \|v - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \|v\|_{MR_p}.$$

Mas

$$\|v - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq \|v(t) - u^*(t)\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} + \|u^*(t) - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq Mr + Mr = 2Mr,$$

Note que $\|u^*(t) - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} = \left\|e^{-A(u_0)t}u_0 - u_0\right\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \leq Mr$ quando T é pequeno.

Note também que

$$\|v\|_{MR_p} \leq \|v - u^*\|_{MR_p} + \|u^*\|_{MR_p} \leq r + r = 2r.$$

Usamos que $\|u^*\|_{MR_p} = \left\|e^{-tA(u_0)}u_0\right\|_{MR_p} < r$, quando T é pequeno.

Juntando tudo

$$\|\Phi(v) - u^*\|_{MR_p} \leq 4\|L\| MC_L r^2 \leq r,$$

se escolhermos $r < \frac{1}{4\|L\|MC_L}$.

2) Agora vamos estimar $\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{MR_p}$, para v_1 e $v_2 \in B_{r,T}$. Vemos que

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\|_{MR_p} \leq \|L\|\|G(v_1) - G(v_2)\|_{L^p(0,T;X)}$$

$$\leq \|L\| \left(\max_{t\in[0,T]} \|A(v_1(t)) - A(u_0)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \|v_1 - v_2\|_{L^p(0,T;Y)} + \max_{t\in[0,T]} \|A(v_1(t)) - A(v_2(t))\|_{\mathcal{B}(Y,X)} \|v_2\|_{L^p(0,T;Y)} \right)$$

$$\leq C_L\|L\| \left(\max_{t\in[0,T]} \|v_1 - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \|v_1 - v_2\|_{L^p(0,T;Y)} + \|v_1 - v_2\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} \|v_2\|_{L^p(0,T;Y)} \right)$$

$$\leq C_L(1+M)\|L\| \left(\max_{t\in[0,T]} \|v_1 - u_0\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} + \|v_2\|_{L^p(0,T;Y)} \right) \|v_1 - v_2\|_{MR_p}$$

$$\leq C_L(1+M)\|L\| \left(\|v_1 - u^*\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} + \|u^*\|_{C\left([0,T];(X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}\right)} + \|v_2 - u^*\|_{MR_p} + \|u^*\|_{MR_p} \right) \|v_1 - v_2\|_{MR_p}$$

$$\leq C_L(1+M)\|L\| \left(M\|v_1 - u^*\|_{MR_p} + M\|u^*\|_{MR_p} + \|v_2 - u^*\|_{MR_p} + \|u^*\|_{MR_p} \right) \|v_1 - v_2\|_{MR_p}$$

$$\leq C_L(1+M)\|L\|(2Mr + 2r)\|v_1 - v_2\|_{MR_p} \leq C_L 2(1+M)^2\|L\| r \|v_1 - v_2\|_{MR_p}.$$

Escolhemos T pequeno de tal forma que $\|u^*\|_{MR_p} < r$.

Basta agora escolher $r < \frac{1}{C_L 2(1+M)^2\|L\|}$ e obtemos uma contração. $\square$

1.3. **Teorema de Regularidade no tempo (Teorema de Angenent).** Vamos estudar o seguinte problema:

$$u'(t) + F(u(t)) = 0,$$

em que $F : Y \to X$ é de classe C^∞. A função F pode ser algo do tipo $F(u(t)) = A(u(t))\,u(t)$, em que $A \in C^\infty\left((X,Y)_{1-\frac{1}{p},}, \mathcal{B}(Y,X)\right)$.

Teorema 8. *Seja $p \in (1,\infty)$, $0 < T < T'$ e $k \geq 1$. Suponha que u seja uma solução do problema.*

1) A aplicação $\mathcal{G} : H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y) \to L^p(0,T;X)$ dada por $\mathcal{G}(u)(t) = F(u(t))$ é de classe C^∞.

2) Suponha que para toda $g \in L^p(0,T;X)$ e $x \in (X,Y)_{1-\frac{1}{p},}$, existe um único $v \in H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y)$ tal que

$$\begin{array}{rcl} v'(t) + F'(u(t))\,v(t) & = & 0,\ t \in (0,T) \\ v(0) & = & x \end{array}.$$

Logo $u \in C^\infty((0,T);X)$.

Exemplo 9. Seja $A \in C^\infty\left((X,Y)_{1-\frac{1}{p},}, \mathcal{B}(Y,X)\right)$, $A(u(t))\,u(t)$ e $F(u) = A(u)\,u$. Neste caso, podemos mostrar que F satisfaz 1). Se $A(u(t)) \in \mathcal{MR}_p(0,T;X)$ para cada $t \in (0,T)$, então F satisfaz 2. (Note que , então $dF(u)(v) = A(u)\,v + (dA(u)(v))(u)$.)

Demonstração. Definimos $u_\lambda(t) = u(\lambda t)$. Logo $u_\lambda'(t) = \lambda u_\lambda(t)$. Logo

$$u_\lambda'(t) + \lambda F(u_\lambda(t)) = 0.$$

Consideremos $G : (1-\epsilon, 1+\epsilon) \times H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y) \to L^p(0,T;X) \times (X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}$ dada por

$$G(\lambda, w) = (w'(t) + \lambda F(w(t)), w(0) - u_0).$$

Logo $G(1,u_\lambda) = 0$ e

$$d_2G(1,u_\lambda)(v) = (v'(t) + dF(u(t))(v), v(0)).$$

Pela regularidade maximal, temos

$$d_2G(1,u_\lambda) : H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y) \to L^p(0,T;X) \times (X,Y)_{1-\frac{1}{p},p}$$

é um isomorfismo. Logo existe $g(\lambda)$ tal que $G(\lambda, g(\lambda)) = 0$, em que g é de classe C^∞. Como $g(\lambda) = u(\lambda t)$, concluímos que

$$\lambda \in (1-\epsilon', 1+\epsilon') \mapsto u(\lambda .) \in H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y)$$

é de classe C^∞. Como $u \in H_p^1(0,T;X) \cap L^p(0,T;Y) \hookrightarrow u(t) \in X$ é linear e contínua, concluímos que $(1-\epsilon', 1+\epsilon') \mapsto u(\lambda t) \in C^\infty$ para todo $t \in \left(0, \frac{T}{1+\epsilon}\right)$. Logo $t \mapsto u(t)$ é C^∞. □

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, 05508-090, São Paulo, S.P., Brasil.

E-mail address: pplopes@ime.usp.br